数値解析（松尾）　配付資料　　2012 年 11 月 20 日

■ Lagrange 補間

Lagrange 補間：「標本点」x_k $(k=1,\dots,n)$，および標本点における関数値 $f(x_k)$ $(k=1,\dots,n)$ が与えられているとき，$n-1$ 次多項式 $p(x)$ で $p(x_k)=f(x_k)$ $(k=1,\dots,n)$ を満たすもの.

（表現１）

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j.$$

ただし a_j $(j=0,\dots,n-1)$ は補間になるよう適切に定める.

（表現２）

$$l_k(x)=\frac{\prod_{j\neq k}(x-x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k-x_j)}\qquad (k=1,\dots,n)$$

とおくとき,

$$p(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)l_k(x).$$

（表現３）

$$R_j(x)=\prod_{i=1}^{j}(x-x_i)\qquad (j=0,\dots,n-1)$$

とおくとき,

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n-1} c_j R_j(x).$$

ただし，c_j は次で定まる「差分商」：

$$c_0=f[x_1]=f(x_1),\quad c_1=f[x_2,x_1]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1},\quad c_2=f[x_3,x_2,x_1]=\frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1},\dots,$$

$$c_{n-1}=f[x_n,\dots,x_1]=\frac{f[x_n,\dots,x_2]-f[x_{n-1},\dots,x_1]}{x_n-x_1}.$$

Lagrange 補間の「近似度」：$f\in C[-1,1]$ とする．各 n に対して，標本点の組 $-1\le x_1<\dots<x_n\le 1$ を決めると，作用素 $L_n: f\mapsto p\in C[-1,1]$ が１つ定まる.

定理．任意の L_n $(n\ge 3)$ に対して，$\|L_n\|_\infty \ge \frac{2}{\pi}\log n+\frac{1}{2}$.

定理．任意の作用素列 $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，ある $f\in C[-1,1]$ が存在して，$\overline{\lim}_{n\to\infty}\|f-L_nf\|_\infty=\infty$.

定理．任意の $f\in C[-1,1]$ に対して，ある作用素列 $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して，$\lim_{n\to\infty}\|f-L_nf\|_\infty=0$.

定理．標本点を「Chebychev 点」：$x_k=\cos((2k-1)\pi/(2n))$ $(k=1,\dots,n)$ にとるとき,

$$\frac{2}{\pi}\log n+\frac{2}{\pi}\log\frac{4}{\pi}\le \|L_n\|_\infty \le \frac{2}{\pi}\log n+\frac{2}{\pi}\log 2+2.$$

■ スプライン補間

区間 $[a,b]$ 上に標本点を $a = x_1 < \cdots < x_n = b$ と置く．このとき

- 各小区間 $[x_k, x_{k+1}]$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ で m 次多項式,
- 全区間 $[a,b]$ で C^{m-1} 級

となる「区分的 m 次多項式」を「m 次スプライン」と呼ぶ．自由度：$(n-1)(m+1) - m(n-2) = n+m-1$. さらに,

- 標本点上で $S(x_k) = f(x_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$

を満たす m 次スプライン $S(x)$ を「m 次スプライン補間」と呼ぶ．自由度：$m-1$.
応用上は 3 次スプライン補間がよく使われる．自由度 2 は,

(i) $S'(x_1 + 0) = f'(x_1 + 0), \quad S'(x_n - 0) = f'(x_n - 0)$，もしくは

(ii) $S''(x_1 + 0) = S''(x_n - 0) = 0$

で補う．

3 次スプライン補間の近似度：$h_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 2, \ldots, n)$，$\bar{h} = \max_k h_k$ とおく．

定理．$f \in C^4[a,b]$ に対して 3 次スプライン補間 $S(x)$ を上の (i) で決定するとき，$\|f - S\|_\infty \le \frac{5}{384}\|f\|_\infty \bar{h}^4$.