数値解析（松尾）　配付資料　2012 年 11 月 16 日

■ Newton 法

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ を解くための Newton 法

$\boldsymbol{x}^{(0)}$: given
for $k = 0, 1, 2, \ldots$ {
　$\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{x}^{(k)} - J(\boldsymbol{x}^{(k)})^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)})$
}

ただし $J(\boldsymbol{x}) = (\partial f_i/\partial x_j)$ は $\boldsymbol{f}$ の Jacobi 行列.

定理（Newton 法の 2 次収束性）　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が真の解 $\boldsymbol{x}^*$ の近傍 D で C^2 級で，$J(\boldsymbol{x}^*)$ が正則ならば，$\boldsymbol{x}^*$ から十分近い初期値から出発する Newton 法の近似解は $\boldsymbol{x}^*$ に 2 次収束する：

$$\exists C > 0, \quad \|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^*\| \le C\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|^2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

（注）$J(\boldsymbol{x}^*)$ が正則でない場合の振る舞いは一般に複雑．ただし 1 次元のときは「重根ならば 1 次収束」が成り立つ.

（注）最適化における「Newton 法」（$\min g(\boldsymbol{x})$ を求めるための Newton 法）と混同しないこと.

■代数方程式に対する Durand–Kerner–Aberth(DKA) 法

n 次多項式 $p(z) = 0$ の根を求める．$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく.

DKA 法

初期値 $z_i^{(0)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ を定める.
$k := 0$; $I := \emptyset$.
$(\bigstar)$ $\Delta z_i^{(k)} := \phi_j(z_1^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)})$　　$(i \in N - J)$.
$z_i^{(k+1)} := z_i^{(k)} + \Delta z_i^{(k)}$ $(i \in N - I)$;　$z_i^{(k+1)} := z_i^{(k)}$ $(i \in I)$.
$I := I \cup \{i \in N - I \mid |\Delta z_i^{(k)}| \le \varepsilon |z_i^{(k+1)}|\}$; $I = N$ なら終了.
$k := k + 1$; $(\bigstar)$ に戻る.

2 次法：

$$\phi_i(z_1, \ldots, z_n) = -\frac{p(z_i)/a_0}{\prod_{l \ne i}(z_i - z_l)} \qquad (i \in I).$$

3 次法：

$$\phi_i(z_1, \ldots, z_n) = -\frac{p(z_i)/p'(z_i)}{1 - \frac{p(z_i)}{p'(z_i)}\sum_{l \ne i}\frac{1}{z_i - z_l}} \qquad (i \in I).$$

[初期値の定め方]

初期値として解の近似値の見当がつかないとき，根を包み込むような初期値の設定の仕方が知られている．$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^k$ に対して，$\beta = -a_1/(na_0)$ とおく．このときある $r > 0$ を（ある手続きにより）定めて，Aberth の初期値：

$$z_i^{(0)} = \beta + r\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{2\pi(i-1)}{n} + \frac{3}{2n}\right)\right] \qquad (i \in N)$$

が目的の初期値の組になる．r の見つけ方については,『数値解析入門』（山本）などを参照のこと．

（例）[山本『数値解析入門』より引用]

$p(z) = z^5 - 10z^4 + 43z^3 - 104z^2 + 150z - 100$, 解 $1 \pm 2\mathrm{i}$, 2, $3 \pm \mathrm{i}$.