数値解析（松尾）　レポート第２回　　2013 年 1 月 25 日

- 質問は matsuo@mist.i.u-tokyo.ac.jp まで．バグ等補足情報は講義ＨＰにて．
- **提出日： 2 月 15 日 (金) 午後５時**.
  提出先：以下のいずれか．(1) 駒場アドミニストレーション棟 レポート提出ボックス，(2) 松尾の郵便受け（工学部６号館１階，正面玄関入って左），(3) 〒 113-8656 文京区本郷７－３－１ 東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻 松尾（**2/15 必着**）.
- Ａ４サイズ，学籍番号・名前・学科（コース）名明記，左上ホチキス止め．原則としてメール提出は認めない（事情がある場合は事前にメール等で連絡のこと）.

第１問 数値積分の Gauss 公式は，被積分関数が高々$2n-1$ 次の多項式とき厳密な積分値を与える．これを以下の手順で証明せよ．但し記号はすべて配付資料 12/21 に沿う.

(1) 配付資料の２つめの定理:「$n \geq 1$ とする．$p(x)$ を $n-1$ 次以下の任意の多項式とするとき $(R_n, p)_w = 0$」を示せ．(但し定義から $(R_m, R_n)_w = 0\,(m \neq n)$ は成立しているとしてよい.)

(2) 被積分関数を $f(x)$（高々$2n-1$ 次の多項式と仮定する）とし，$f(x) = R_n(x)Q(x) + R(x)$ と置く（但し $Q(x), R(x)$ は $f(x)$ を $R_n(x)$ で除算して得られる商と余り）．このとき両辺を積分すると

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x = \int_a^b R(x)w(x)\mathrm{d}x$$

となることを示せ.

(3) 同じ式を，重み関数 $w(x)$ に対応する Gauss 公式で数値積分すると，

$$\sum_{k=1}^n w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n w_k R(x_k)$$

となることを示せ.

(4) 重み w_k の定義に注意して，

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

を示せ.

第２問 与えられた実定数 a に対して $a^{1/3}$ を求めるための Newton 反復式を示せ．また定数 a と初期値をいくつか適当に決めて実際に反復し，反復の様子について議論せよ.

第３問 常微分方程式の初期値問題：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= cy, \qquad t > 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

を $c = -1$，および $c = -10$ の場合に陽的 Euler 法，陰的 Euler 法，および台形則で解き，安定性理論に照らして結果を説明せよ．ただし時間刻み幅の選択は，それぞれの手法の違いが明確に現れるように設定すること（必要に応じていくつかの場合を試すことも推奨する）.

（番外） 講義についての要望・感想・改善案等があったら書いてください.（有意な意見に対しては，成績「$+\varepsilon$」）