数値解析（松尾） レポート 2012年11月20日

- 質問は matsuo@mist.i.u-tokyo.ac.jp まで．バグ等補足情報は講義ＨＰにて．
  http://www.sr3.t.u-tokyo.ac.jp/~matsuo/lecture/12suchi/index.html
- **提出日： 12月14日 (金) 13時**．提出先：駒場アドミニストレーション棟レポート提出箱．(※本郷学生は工６号館１階松尾のメールボックスでもよい．電子メールで PDF 提出等は不可．)
- Ａ４サイズ，学籍番号・名前・学科（コース）名明記，左上ホチキス止め．
- 無印＝必須，(**【計】**＝計算機を使う課題，**【手】**＝手で解く問題）はどちらかを選択．
- 計算機を使う課題においては，計算環境（PC の性能や使用した言語，ソフト）を明示すること．

第１問 LU 分解と，それを用いて $Ax = b$ を解くための計算量（四則演算それぞれ）を評価せよ．ただし簡単のため枢軸選択はないものとしてよい．結果だけではなく計算の根拠をアルゴリズムに即して記すこと．

第２問 次の２つの行列に対し初期ベクトル $(1, 1, 1)^T$ から出発してべき乗法を適用せよ．結果はそれぞれどう解釈されるか．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意：手（電卓）計算でやるときは，整数性を保つためにベクトルを正規化しない方が楽．

第３問 【計】 N 次実対称正定値行列

$$A = \begin{pmatrix} c & -1 & & & \\ -1 & c & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & c & -1 \\ & & & -1 & c \end{pmatrix}$$

($c \geq 2$，非表示成分はすべて 0）を係数とする線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．(注：$c = 2$ の場合，上の行列は例えば Poisson 方程式の差分法による離散化で現れる．)

(1) $c = 2$，および $c = 20$ のそれぞれの場合に対して，(i) CG 法，(ii) CG 法以外の反復法（どれか１つでよい）を適用し，残差 $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|$ の収束の様子を観察せよ．ただし行列の大きさ N と右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ は，各自の計算環境に照らして適切に定めること．

(2) 上の結果を，講義で説明した各種定理と関連づけて考察せよ．

第４問 【手】 QR 分解について，以下の問いに答えよ．

(1) Gram–Schmidt の直交化法と行列の QR 分解の同値性を次の手順で示せ．(i) $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_N)$ と書くとき（$\boldsymbol{a}_j$ は A の第 j 列），ベクトル列 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ に，この順に Gram–Schmidt の直交化をかけて直交ベクトル列 $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N$ を得るアルゴリズムを書け．(ii) $Q = (\boldsymbol{q}_1 \cdots \boldsymbol{q}_N)$ とおくとき，上三角行列 R を用いて $A = QR$ と書けることを示せ（上を参考に r_{ij} を特定せよ）．

(2) 初期行列 A が Hessenberg 形であるとき，QR 法のアルゴリズムで現れる A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ がすべて Hessenberg 形であることを示せ．

（番外） 講義についての要望・感想等があったら書いてください．(有意な意見に対しては，成績「$+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$」)

参考：数値計算にあたっての注意

■ **MATLAB/Scilab：**

今回のレポートにはたとえば次の関数 (Scilab) が有用であろう.

`[L U]=lu(A)`	LU 分解（枢軸選択するときは左辺が `[L U P]`）
`cond(A)`	$\mathrm{cond}_2(A)$
`spec(A)`	A の固有値（`ev` はベクトル）（MATLAB は `eig(A)`）
`inv(A)`	A^{-1} （使わないで欲しいがチェック用に）
`norm(v,p)`	ベクトルの p 乗ノルム（$p=2$ のとき省略可）
`norm(A,p)`	行列の p 乗ノルム（$p=2$ のとき省略可）

注：$\|\cdot\|_\infty$ は，`norm(v,'inf')`（Scilab），`norm(v,inf)`（MATLAB）.