数値解析（松尾）　レポート第２回　　　　2019 年 12 月 16 日

- 質問は `matsuo@mist.i.u-tokyo.ac.jp` まで．バグ等補足情報は講義ＨＰにて．
- **提出日： 2019 年 2 月 14 日 (金) 午後 5 時．** ITC-LMS にて提出（電子提出が難しい場合はメールにて相談のこと）．
- 学籍番号・名前・学科（コース）を明記のこと．

問（必須）． 調和振動子の初期値問題：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t > 0,$$
$$q(0) = 0,\ p(0) = 1,$$

を数値的に解くことを考える．次の小問に答えよ．ただし，計算機を使うことが難しい場合は，一部スキップして理論解析だけでレポートを提出することも可とする（当然ながら満点は付かない）．

(1) この問題を陽的 Euler 法，陰的 Euler 法，台形則，4 次 Runge–Kutta 法などで解き，解の軌道を (p,q) 平面上に描け．(時間刻み幅は，各手法の解軌道の特徴が現れるように適切に選ぶこと．)

(2) 上記の結果は，講義で説明した安定性条件からどのように理解できるか議論せよ．安定・不安定は刻み幅の大きさに依存するか？(上で数値実験ができない場合は，理論的に何が予想されるか議論せよ．)

(3) 以下では，Euler 法，台形則など 1〜2 次の一段法だけを考える（すなわち 4 次 Runge–Kutta 法は考えない）．これらは，手法と刻み幅 h に依存して決まるある行列 $A(h)$ で

$$z_{n+1} = A(h)z_n$$

と表せる．但し，$z_n := (p_n, q_n)^\top$ は，時刻 $t = nh$ における解の近似ベクトルである．(2) の安定性解析とは別に，線形写像 $A(h)$ の性質を議論することにより，数値解の挙動（安定性）を議論せよ．

問（オプション）． 意欲のある人は，さらに次の課題に挑戦してみよ．

上の問題は，基本的で教育的であるが，解いている問題自体は単純で解析的にも解けるものである．より複雑な問題に対して，発展的話題として紹介した幾何学的数値解法も含め種々の算法を試し，結果を評価・報告せよ．問題は問わないが，いくつかの物理的例題を裏面に示す．

（番外） 講義についての要望・感想・改善案等があったら書いてください．(有意な意見に対しては，成績「$+\varepsilon$」)

[単振り子（剛体振り子）] 自由度 1 の Hamilton 系で $H(q,p) = p^2/2 - \cos(q)$ としたもの：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -\sin q \end{pmatrix}.$$

$H(q,p)$ は保存量．座標系の定義から近似解は振り子の運動面（円）から決して出ないが，保存的でない解法の場合，エネルギー H が変化するため，(q,p) の 2 次元位相空間上では正しい軌道に乗らない．

[（Undamped）Duffing 振動子] 上記同様自由度 1 の Hamilton 系で，

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{(1-q^2)^2}{4}$$

としたもの．さらに，Hamilton 系を定義する symplectic 行列を

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -d \end{pmatrix}, \qquad d > 0$$

と変更した「摩擦項」付きを通常「Duffing 振動子」と呼ぶ．このとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(q,p) \leq 0.$$

すなわちこの問題は散逸的で，解は不動点 $(q,p) = (\pm 1, 0)$ に漸近する.（原点 $(q,p) = (0,0)$ も不動点だが，不安定で厳密解はそこには近づかない.）

[Hénon–Heiles 系] 自由度 2 の Hamilton 系で，

$$H(q,p) = \frac{{p_1}^2 + {p_2}^2}{2} + \frac{{q_1}^2 + {q_2}^2}{2} + {q_1}^2 q_2 - \frac{{q_2}^3}{3}$$

としたもの．銀河中心の惑星の運動を記述（？）し，軌道はカオス的．また原点 $q = 0$ の十分近くから出発すれば厳密解は有界領域（三角形になる）に閉じ込められるが，保存的でない場合，近似解はその限りではない．

[Kepler 問題] 自由度 2 の Hamilton 系で，

$$H(q,p) = \frac{{p_1}^2 + {p_2}^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2}}$$

としたもの．ご存じ二体問題．以下の 3 つの保存量を持つ．

- $H(q,p)$
- 角運動量ベクトル $L = q \times p$（ただし「$\times$」はベクトルの外積）
- Laplace–Runge–Lenz ベクトル $p \times L - q/\|q\|$（これは楕円軌道の長軸を向く）

上ふたつを保存する解法は容易に作れるが，3 つすべての保存は常人には無理（→ Minesaki–Nakamura, Phys. Lett. A, **306**(2002), 127–133）．その帰結として，非保存的な解法はもちろん，保存的な解法であっても，一般には LRL ベクトルの破壊によって運動面は非物理的なものとなる．