

■ Lagrange 補間

Lagrange 補間：「標本点」 x_k ($k = 1, \dots, n$)，および標本点における関数値 $f(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$) が与えられているとき， $n - 1$ 次多項式 $p(x)$ で $p(x_k) = f(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$) を満たすもの。

(表現 1)

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j.$$

ただし a_j ($j = 0, \dots, n - 1$) は補間になるよう適切に定める。

(表現 2)

$$l_k(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} \quad (k = 1, \dots, n)$$

とおくとき，

$$p(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x).$$

(表現 3)

$$R_j(x) = \prod_{i=1}^j (x - x_i) \quad (j = 0, \dots, n - 1)$$

とおくとき，

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j R_j(x).$$

ただし， c_j は次で定まる「差分商」：

$$c_0 = f[x_1] = f(x_1), \quad c_1 = f[x_2, x_1] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}, \quad c_2 = f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1}, \dots,$$

$$c_{n-1} = f[x_n, \dots, x_1] = \frac{f[x_n, \dots, x_2] - f[x_{n-1}, \dots, x_1]}{x_n - x_1}.$$

Lagrange 補間の「近似度」： $f \in C[-1, 1]$ とする．各 n に対して，標本点の組 $-1 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1$ を決めると，作用素 $L_n : f \mapsto p \in C[-1, 1]$ が 1 つ定まる．

定理．任意の L_n ($n \geq 3$) に対して， $\|L_n\|_\infty \geq \frac{2}{\pi} \log n + \frac{1}{2}$ ．

定理．任意の作用素列 $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，ある $f \in C[-1, 1]$ が存在して， $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n f\|_\infty = \infty$ ．

定理．任意の $f \in C[-1, 1]$ に対して，ある作用素列 $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して， $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n f\|_\infty = 0$ ．

定理．標本点を「Chebychev 点」： $x_k = \cos((2k - 1)\pi/(2n))$ ($k = 1, \dots, n$) にとるとき，

$$\frac{2}{\pi} \log n + \frac{2}{\pi} \log \frac{4}{\pi} \leq \|L_n\|_\infty \leq \frac{2}{\pi} \log n + \frac{2}{\pi} \log 2 + 2.$$

■ スプライン補間

区間 $[a, b]$ 上に標本点を $a = x_1 < \dots < x_n = b$ と置く. このとき

- 各小区間 $[x_k, x_{k+1}]$ ($i = 1, \dots, n - 1$) で m 次多項式,
- 全区間 $[a, b]$ で C^{m-1} 級

となる「区分的 m 次多項式」を「 m 次スプライン」と呼ぶ. 自由度: $(n - 1)(m + 1) - m(n - 2) = n + m - 1$.
さらに,

- 標本点上で $S(x_k) = f(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$)

を満たす m 次スプライン $S(x)$ を「 m 次スプライン補間」と呼ぶ. 自由度: $m - 1$.

応用上は 3 次スプライン補間がよく使われる. 自由度 2 は,

- (i) $S'(x_1 + 0) = f'(x_1 + 0)$, $S'(x_n - 0) = f'(x_n - 0)$, もしくは
- (ii) $S''(x_1 + 0) = S''(x_n - 0) = 0$

で補う.

3 次スプライン補間の近似度: $h_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 2, \dots, n$), $\bar{h} = \max_k h_k$ とおく.

定理. $f \in C^4[a, b]$ に対して 3 次スプライン補間 $S(x)$ を上の (i) で決定するとき, $\|f - S\|_\infty \leq \frac{5}{384} \|f\|_\infty \bar{h}^4$.

※本稿の内容は概ね『数値計算法の数理』(杉原・室田, 岩波書店)による.

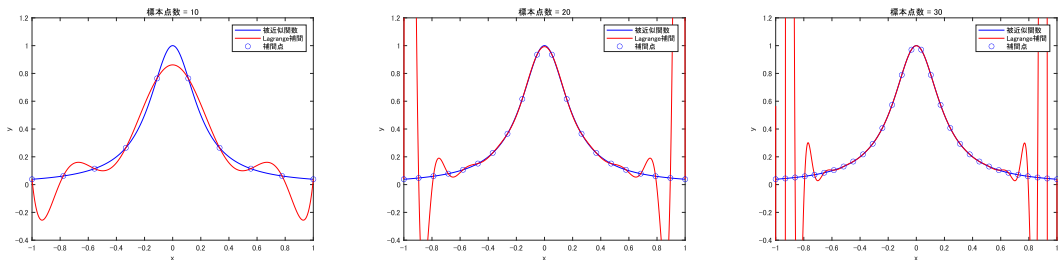


図 1: $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ に対する Lagrange 補間: 等間隔標本点

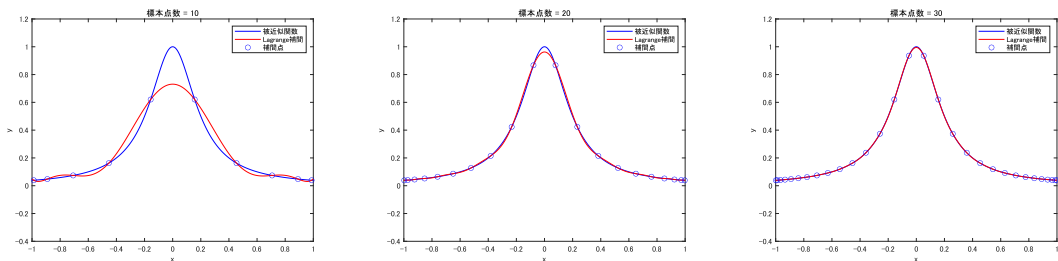


図 2: $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ に対する Lagrange 補間: Chebyshev 点