精度保証付計算による双曲性証明

３次元多様体のトポロジーと幾何

正井 秀俊　(東京大学大学院数理科学研究科)*

平成 28 年 12 月 27 日

1. 背景

トポロジー（位相幾何学）とは,「柔らかい幾何学」とも呼ばれる比較的新しい幾何学の一分野である.「幾何学」と呼ばれるが，実際にはトポロジーは対象の幾何，すなわち対象とする形の量的情報を捨て,「位相」もしくはそれ自体「トポロジー」と呼ばれる形の質を研究する分野である．位相，トポロジーは幾何に比べて持っている情報が少ないが，その分，形の本質を掴んでいる．位相を与えられた空間を位相空間と呼ぶ．位相空間の中でも特に，局所的に n 次元ユークリッド空間と同一視することができるものを n 次元多様体といい，特に興味深い研究対象となっている（入門書としては [11] などがある）．球面は２次元の多様体である．地球の表面は球面と（ほぼ）みなせるが，我々まわり（局地的に）は２次元ユークリッド空間，すなわち平面のように見える．また，我々が生きているこの宇宙を考えるとき，近くでは（局所的には)「たて・よこ・高さ」の３次元の座標軸がとれる．もちろん宇宙の遥か彼方でどうなっているか，現在の我々には知ることは出来ないけれども，願望として「宇宙には特別な場所はない」ことを仮定すれば，この宇宙は**３次元多様体**であると言える [1].

さて，この３次元多様体の概念が導入された初期に活躍した特筆すべき数学者として，トポロジーの創始者とも言われる アンリ・ポアンカレがいる．形の本質をつかもうとするトポロジーの新しい考え方は，多くの数学者の心をつかみトポロジーの研究は２０世紀において大きな発展を得た．ポアンカレは 1884 年から 1904 年にかけての６本の論文で，代数的トポロジーにおける重要な概念の基礎の多くを導入した．その最後の論文の中で彼が提起したのが，今日では「ポアンカレ予想」と呼ばれる最も単純な３次元多様体の特徴づけに関する予想であった．ほぼ 100 年の歳月の後，2002 年から 2003 年にかけて，ポアンカレ予想はロシアの数学者グリゴリー・ペレルマンによって肯定的に解決される [2]．より正確には，ペレルマンが解決したのは，ポアンカレ予想の大きな一般化として，ウィリアム・サーストンが提起した**幾何化予想**である．1970 年代にサーストンは３次元多様体論を衝撃的に変革した．トポロジーは幾何を忘れて，形の質を掴む分野であった．サーストンは３次元多様体のトポロジーから，本質的に得られる幾何があると予想した（下の定理 5.1 はその一例)．より詳しく言うと，彼は３次元多様体論の研究に，幾何構造の考え方を導入し，多くの３次元多様体がシンプルな幾何構造を持つ部分に分解されることを証明した．そして，それがすべての３次元多様体に対しても成り立つことを予想として提起した．これがサーストンの幾何化予想である．

よく知られているように，２次元多様体である閉曲面は，正曲率，平坦，負曲率の３

* 〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: `3masai at gmail.com`

[1] この仮定を「宇宙原理」という．またここでは時間軸を考えてはいない．

[2] ペレルマンによるポアンカレ予想の解決については [10] などの一般向けの本も出版されている．

種類の幾何構造のいずれかを許容する．驚くべきことに，サーストンは，それまで全く不可能だと思われていた，この状況が３次元多様体についても成り立ちうることを示した．実際，彼は対応する３次元の幾何構造がちょうど８種類あることを示し，さらに，非常に多くの３次元多様体がそれらの幾何構造を許容する部分に一意に分解されるということを示したのである．

さて，曲面の幾何構造において，もっとも一般的なものは，負曲率の構造，つまり**双曲幾何構造**だった[3]．そして，３次元多様体に対しても，その８種類の幾何構造の中で最も興味深いと考えられているのが，やはりいわゆる非ユークリッド幾何学である双曲幾何構造なのである．では一般に３次元多様体が与えられた時，それがどのような幾何構造を許容するのか，特に，いつ双曲幾何構造を許容するのか，どのように判定すれば良いだろうか．この問題は容易ではないことがしられており，いくつかの研究が一つの多様体の双曲性を証明できないがために発表できない状態にあった．また，様々な理論が有限個の多様体の双曲性から，無限個の多様体に関する主張を導くことが知られていた．

以下では，精度保証付き計算を用いて，コンピュータによって，与えられた３次元多様体が双曲幾何構造を許容することを証明する方法について紹介する．この研究はトポロジーの研究者である 市原一裕氏，Neil Hoffman 氏, 精度保証付計算の研究者である大石進一氏，柏木雅英氏，高安亮紀氏との共同研究である [8]．開発したプログラムは開発チームのイニシャルから HIKMOT と名付けられ一般に公開されている．§2 では双曲平面，双曲空間の簡単な性質をまとめる．その後 §3 で貼合せ方程式とよばれる多様体の双曲性を得るのに必要な方程式について解説する．HIKMOT は貼合せ方程式を精度保証付で解くプログラムである．HIKMOT は SnapPy [4] とよばれる，３次元多様体の双曲構造を近似計算するプログラムをもとに作られている．§4 では，SnapPy の簡単な使い方を紹介し，§5 で HIKMOT のアルゴリズムを簡単に解説する．最後に §sec.application では HIKMOT を用いることにより得られたいくつかの結果を紹介する．

2. 双曲空間

双曲空間の入門用の日本語の本としては [7, 13] などがある．また英語であるが，サーストンのレクチャーノート [14] や本 [1, 12] などが標準的教科書として参照されている．ここでは，最低限の定義を与える．双曲空間は様々なモデルを持つが，ここでは上半平面モデルを用いる．また，２次元と３次元に限定して話をすすめる．空間としては双曲平面 $\mathbb{H}^2$ と双曲空間 $\mathbb{H}^3$ は

$$\mathbb{H}^2 := \{(z = x + y\sqrt{-1},) \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$
$$\mathbb{H}^3 := \{(z = x + y\sqrt{-1}, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}$$

となる．この $\mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}^3$ に それぞれリーマン計量を $(dx^2 + dy^2)/y^2$, $(dx^2 + dy^2 + dt^2)/t^2$ として与えたもの，というのが形式的な双曲平面と双曲空間の定義である．計量は，y や t の値が大きくなるにつれ，見た目の長さよりも “実際の” 長さが短くなることを意

[3] 閉曲面の位相型は種数（つまり穴の数）によって決まるが，種数が０の場合が球面幾何，種数が１の場合が平坦幾何（ユークリッド幾何）に対応するのに対して，種数が２以上がすべて双曲幾何構造に対応する．

味している．そのため，測地線と呼ばれる，与えられた計量において最短を実現する曲線は境界

$$\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} (= S^1)$$
$$\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} (= \hat{\mathbb{C}})$$

に直交する半円となる（図1参照）．また，測地面と呼ばれる $\mathbb{H}^3$ の中に等長に埋め込まれた２次元の双曲平面 $\mathbb{H}^2$ は境界に直交する半球となる．なお，境界に直交し，無限遠へのびる直線を "半円" と平面を "半球" とそれぞれ見なしていることに注意する．計量を保つ同相写像を等長写像という．双曲平面，双曲空間においては次の事実が知られている．

命題 2.1. *1.* すべての向きを保つ等長写像による群をそれぞれ $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$，$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ とかく．このとき

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm I\}$$
$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$$

が成り立つ．ここで $\cong$ は群同型を表す．

$\mathbb{H}^2$ 上で各等長写像は一次分数変換として次のように作用している．

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az-b}{cz-d}.$$

ここで $\pm I$ は上の作用を変えないことに注意する．

2. $\mathbb{H}^3$ の各等長写像は境界 $\partial\mathbb{H}^3$ に次のように拡張する．各 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az-b}{cz-d}.$$

3. 任意の相異なる境界 $\partial\mathbb{H}^3$ 上の３点の組 $\{z_1, z_2, z_3\}$ と $\{w_1, w_2, w_3\}$ に対して等長写像 φ がただ一つ存在して

$$\varphi(z_i) = w_i,\ \forall i \in \{1,2,3\}$$

が成り立つ．

相異なる境界 $\partial\mathbb{H}^3$ 上の４点 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ を考える．どの３点も同一直線上にないと仮定する．この時すべての３点の取り方に対して，それらを含む測地面（ユークリッド平面上の同一直線上にない３点は円を定めることに注意する．その円が測地面である半球の境界に相当する）で囲まれる領域を考える．この領域を理想四面体と呼ぶ．ここで，命題2.1の3 により $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$ と仮定しても一般性を失わないことに注意する．図1 は $z_4 = z$ とした時の理想四面体の絵である．

理想四面体の形は複素数 $z_4 = z(\Im(z) > 0)$ が与えられれば一意に決まることに注意する．$\{0, 1, \infty\}$ にどの３点を送るかの自由度があり，それをかえると対応する複素数は $z, 1-\frac{1}{z}, \frac{1}{1-z}$ のいずれかになることがが知られている．

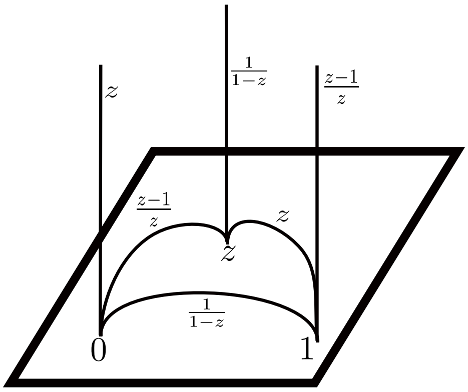

図 1: 理想双曲四面体

3. 貼合せ方程式〜解が双曲性を証明する

本節では貼合せ方程式（Gluing equation）について解説する．貼合せ方程式 は ウィリアム・サーストン が３次元多様体の四面体分割に対して構成した複素連立方程式である．ここで，３次元多様体の四面体分割は組合せ情報のみが与えられていることに注意する．貼合せ方程式は，四面体分割に現れる各四面体に§2 で述べた理想四面体の構造を，綺麗に“貼合う”ようにいれるために，各四面体に対応する複素数が満たすべき方程式である．詳しくはサーストンのレクチャーノート [14] もしくはHIKMOT の解説論文 [8, §2] を参照していただきたい．貼合せ方程式が解を持てば多様体は双曲構造を持つ．

定理 3.1 (サーストン)**.** 各虚部が正となる貼合せ方程式の解が存在すれば，多様体は有限体積完備双曲構造を持つ．

注意 3.2. 貼合せ方程式を立式するためには四面体の各頂点のリンク（小さな近傍の境界）がトーラスである必要が有る．リンクとして現れるトーラスがカスプとなる場合と Dehn filling と呼ばれる操作でトーラスを埋める場合両方に対して（異なる方程式）が貼合せ方程式として立式されている．本予稿で紹介する HIKMOT は両方の場合の貼合せ方程式を誤差評価付で解くことができる．

定理3.1 の逆は成り立たない．すなわち，双曲構造を持つ多様体の四面体分割の貼合せ方程式 が解を持たない可能性がある．多様体の四面体分割の方法は無限通りあり，全てを探索する事はできない．また,「全ての双曲構造を持つ多様体が貼合せ方程式 が解を持つように，四面体分割できるか？」という問いは未解決である．そのため HIKMOT は与えられた多様体の双曲構造の「存在」を証明する事ができるが，双曲構造の「非存在」を証明する事はできない．実際に与えられた多様体の双曲構造を探す際には，四面体分割を取り替え，いくつかの分割で証明を試みている．

今回は貼合せ方程式の導出については説明を省略する．貼合せ方程式 は以下のようなものである．

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}(z_j)^{(a_{j,k}-c_{j,k})}\cdot(1-z_j)^{(-b_{j,k}+c_{j,k})}=\prod_{j=1}^{n}(-1)^{c_{j,k}}\right\}_{k=1}^{n+2h_u+h_f} \tag{1}$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\arg((z_j)^{(a_{j,k}-c_{j,k})})+\arg((1-z_j)^{(-b_{j,k}+c_{j,k})})=\epsilon_k-\sum_{j=1}^{n}c_{j,k}\cdot\pi i\right\}_{k=1}^{n+2h_u+h_f} \tag{2}$$

変数は $z_i(i = 1,\dots,n)$ であり，これらは各四面体に対応する複素変数である．各 $a_{j,m}, b_{j,m}, c_{j,m}$ は $\{0,1,2\}$ の元であり，ϵ_k は $k\in\{1,\dots,n\}\cup\{n+2h_f+1, n+2h_f+h_u\}$ の時 2π，そうでないとき 0 である．

4. SnapPy〜貼合せ方程式の立式

四面体分割から貼合せ方程式の立式はジェフ・ウィークス により開発されたSnapPeaを用いている（SnapPea は現在 ダンフィールドとカラー に引き継がれ Python 上で動く SnapPy [4] として配布されている）．SnapPea は ニュートン法を用いて，貼合せ方程式 の近似解を計算する事ができる．ここでは，SnapPy [4] の基本的な使い方を結び目補空間を３次元多様体の例として解説する．

３次元球面 S^3 内の円周 S^1 の滑らかな埋め込みを**結び目**という．結び目の補空間に対しては経験的に非常にうまく動く四面体分割アルゴリズムが知られている．SnapPy ではそのアルゴリズムを用いて，描かれた結び目の四面体分割を計算し，その貼合せ方程式を立式することができる．本節では結び目の入力方法を含め，基本的なSnapPy の使い方を解説する．図2 はSnapPy の起動画面である．

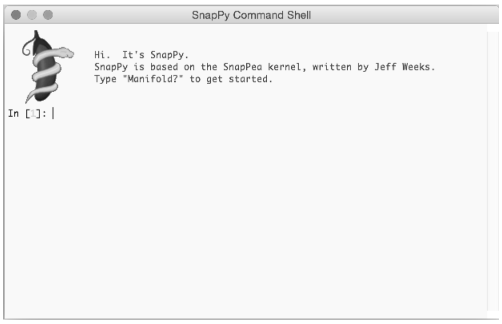

図 2: SnapPy の起動画面

基本的にはPython のインタプリタである．提案されているように “Manifold?” と入力すると様々な多様体の入力方法の説明が得られる．ここでは最も基本的な Plink と呼ばれる描画画面を用いた方法を解説する．多様体はクラスとして定義されているため，“M = Manifold()” などと変数に対して入力を行う．図3のように描画画面が出力される．

Plink 上をクリックすることで区分的に線形な図形を描画できる．図4 で描いた結び目は八の字結び目と呼ばれる，補空間が双曲構造を許容する最も基本的な結び目である．“Tool” に “Send to SnapPy” という項目があり，それを選択することで変数 M に描いた結び目の補空間の四面体分割の情報が送られる．

SnapPy は自動的に貼合せ方程式を立式し，Newton 法で近似解を求める．

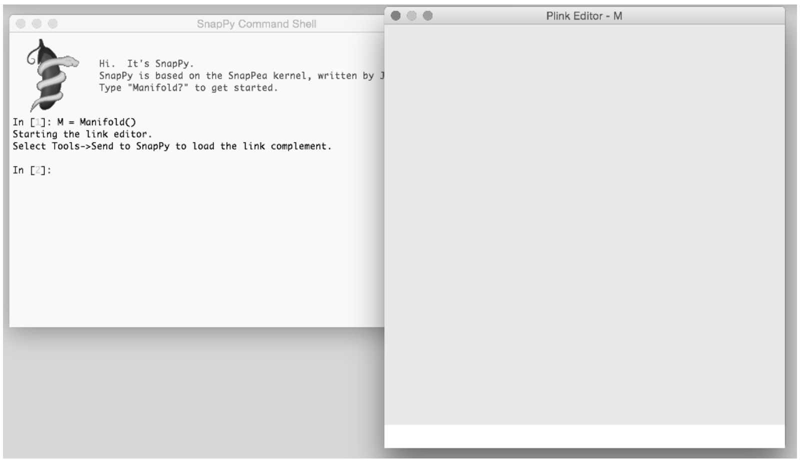

図 3: Plink

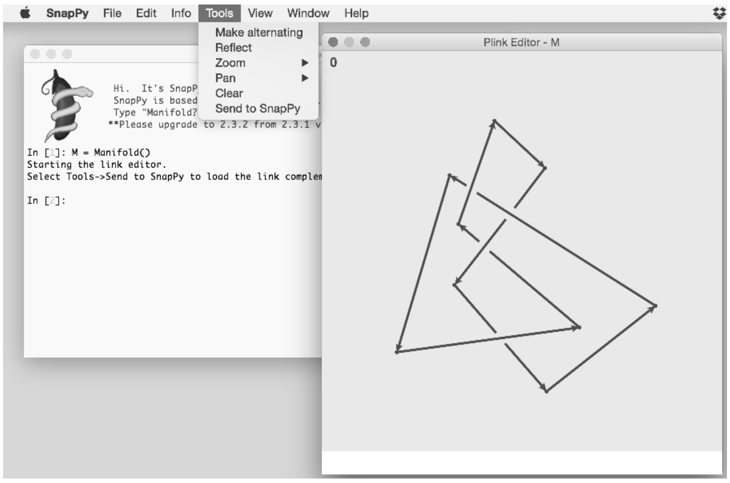

図 4: 八の字結び目の情報を SnapPy へ送る

5. HIKMOT〜貼合せ方程式 を精度保証計算で解く

この節では開発者の頭文字をとって HIKMOT [8] と名付けられた，貼合せ方程式 を精度保証計算で厳密に解くプログラムについて解説する．入力データは多様体の四面体分割もしくは，結び目の絵である（上で述べたように SnapPy は結び目補空間の四面体分割を計算できる）．SnapPy に情報を入力し，貼り合わせ方程式を立式，近似解を計算し，その情報をもとに精度保証計算を用いて解の収束を保証し，解を含む区間を得ている．

HIKMOT では次の二段階にわけて貼合せ方程式 を精度保証付きで解いている．

1. Krawczyk テスト（高安氏の予稿§3 を参照）を用いて，貼合せ方程式の (1) を満たす解を含む区間を計算．

2. 区間化された atan 関数を用いて，得られた解の区間が貼合せ方程式の (2) を満たしている事を検証．

各ステップについて詳しく解説をする．

Krawczyk テストを用いる際には変数の数と同数の独立な方程式を得る必要がある．今回対象にしている貼合せ方程式の (1) は n 個の変数に対して，$n + 2h_u + h_f$ 本の方程式がある．次の定理が「貼合せ方程式が解を持つ」の仮定の下，n 本の独立な方程式を持つ事を保証している．

定理 5.1 (Mostow 剛性定理)．3 次元多様体の完備有限体積双曲構造は，存在すれば一意である．

注意 5.2. 定理5.1 は与えられた二つの 3 次元多様体が，同じトポロジーを持ち，それぞれ双曲構造を持つ場合，その双曲構造も一致することを示している．背景でも述べたように，トポロジーは多くの情報を忘れているにもかかわらず，多様体の双曲構造はトポロジーから自然に定まる構造と言える．定理5.1 により，3 次元双曲多様体の様々な性質を調べるにあたり，トポロジーを用いた双曲幾何の研究もしくは双曲幾何を用いたトポロジーの研究ができ，理論が大きく発展した．

定理3.1 により，貼合せ方程式の解は双曲構造に対応する．そのため，定理5.1 により貼合せ方程式から n 本の方程式を選び，それらが連立方程式として解を持つならば選んだ n 本は独立である事がわかる．

選んだ n 本の方程式が独立であるかは，$\alpha_{j,k} = a_{j,k} - c_{j,k}$，$\beta_{j,k} = -b_{j,k} + c_{j,k}$ とし変数の指数からなる係数行列

$$\Lambda_M = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{n,1} & \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,n+2h_u+h_f} & \cdots & \alpha_{n,n+2h_u+h_f} & \beta_{1,n+2h_u+h_f} & \cdots & \beta_{n,n+2h_u+h_f} \end{bmatrix} \tag{3}$$

の階数を計算する事によって判定できる（対数をとった連立方程式を考えれば良い）．階数が n となる方程式を近似計算により予測し方程式を選ぶ．こうして選んだ n 本の方程式と SnapPy で得られた初期値に対して，Krawczyk による解の検証法を適用し，解の収束判定を行う．実用的には，失敗した際は他の n 本の方程式を用いて，再度 Krawczyk テストにかけている．それでもうまくいかない場合は，SnapPy の四面体分割をランダムに置き換える関数を用い，何度か上の計算を繰り返し，うまくいく場合がないかを調べている．

次に貼合せ方程式の (1) を満たす区間 X が得られたとき，どのように貼合せ方程式の (2) を検証するかについて説明する．まず，式の形により貼合せ方程式の (2) の右辺は必ず π の整数倍である事に注意する．偏角の計算には区間化された atan2 関数を用いる（こちらも高安氏の予稿§3 参照）．解の区間 X から (2) の左辺を計算し，得られた区間が含む π の整数倍となる値が，(2) の右辺で指定されたもののみであれば，(2) は区間 X の中に解を持つ事がわかり，検証が完了する．

6. 応用

この節では HIKMOT の実用性を示す幾つかの応用を紹介する

6.1. SnapPy 上にあるリスト (census) 上の多様体の双曲性

SnapPy は実験用に幾つかの多様体のリスト（SnapPy 上では census と呼ばれる）を持っている．このリストは [2, 3, 15] で求められ，SnapPy における近似計算で双曲である事が予想されていた多様体のリストである．張り合わせに用いる四面体の個数で多

様体は列挙されており，現時点で9つの四面体の貼り合わせで得られる多様体のリストが得られている．リスト内の多様体の総数は61911である．このリストは現在SnapPyの上でOrientableCuspedCensus として利用できる．

定理 6.1. `OrientableCuspedCensus`の全ての多様体は双曲構造を持つ．

proof. HIKMOT を`OrientableCuspedCensus`の全ての多様体に適用する．著者のPCで計算時間は約18分であった． □

6.2. 交代結び目の例外的手術の分類

著者は日本大学の市原一裕氏と共同で交代結び目の例外的手術の分類を行った [9]．分類ではまず，先行研究をもとにした列挙プログラムで，調べるべき多様体の “種” のリストを生成した．そして，リストの中の各多様体に対して，

- 精度保証付計算で得た誤差評価付双曲構造を用いて幾何学的な量を計算し，
- 得られた誤差評価付の幾何学的な情報からさらに調べる多様体を生成し，
- そのすべての双曲性をHIKMOT で証明する

ことを行った．合計で約500万個の多様体を生成し，その双曲性をHIKMOT で証明して分類が完成した．この問題がHIKMOT 開発のきっかけであり，精度保証付計算がシンボリック計算などにくらべて非常に高速であるという特徴が大いに生かされた応用例である．この計算はPC の手に負えず，東京工業大学のスーパーコンピュータ，TSUBAME [16] を用いた．TSUBAME 上での並列計算により約1週間で行われた計算の，すべてのノードの合計計算時間は約512日であった．

6.3. 標準的分割の厳密計算

§6.2 でも述べたようにHIKMOTの利点は双曲性の厳密証明のみならず，双曲構造を誤差評価付で計算できる点にもある．結果として不等式を示すことで証明できる定理を計算機で得ることができる．一つの例としてエプステイン-ペナー [6] による標準的分割がある．標準的分割は定理5.1 により，双曲多様体のトポロジーを完全に決定する強力な不変量である．ウィークス [17] により標準的分割はtilt formula と呼ばれる不等式で確認できることが知られている．ダンフィールド-ホフマン-リカタ [5] はHIKMOTを用いて，与えられた四面体分割が標準的分割であるかを判定するプログラムを作成した．多様体の対称性の判定など，様々な用途に使われている．

謝辞

「応用数理セミナー」にお招きくださった世話人の方々に感謝いたします．本研究はJSPS 特別研究員奨励費の援助を受けております．

参考文献

[1] R.Benedetti and C.Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, 1992.

[2] B. Burton, *The cusped hyperbolic census is complete*, to appear in Transactions of the American Mathematical Society, arXiv:1405.2695.

[3] P. Callahan, M. Hildebrand and J. Weeks, *A census of cusped hyperbolic 3-manifolds*, Math. Comp. 68 (1999), no. 225, 321–332.

[4] M. Culler, N. Dunfield, and J. Weeks, *SnapPy, a computer program for studying the topology of* 3*-manifolds*, Available at `http://snappy.computop.org`.

[5] N. Dunfield, N. Hoffman, and J. Licata, *Asymmetric hyperbolic L-spaces, Heegaard genus, and Dehn filling*, Math. Research Letters, Vol. 22, No. 6 (2015) 1679-1698.

[6] D. B. A. Epstein and R. C. Penner, *Euclidean decomposition of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Diff. Geom. 27 (1988) 67-80.

[7] 深谷 賢治，双曲幾何 (現代数学への入門)，岩波書店（2004）

[8] N. Hoffman, K. Ichihara, M. Kashiwagi, H. Masai, S. Oishi, and A. Takayasu, *Verified computations for hyperbolic 3-manifolds,* Exper. Math., 25 (2016), Issue 1, 66-78. Codes available at `http://www.oishi.info.waseda.ac.jp/~takayasu/hikmot/`.

[9] K. Ichihara and H. Masai, *Exceptional surgeries on alternating knots*, Communications in Analysis and Geometry, Volume 24, Number 2, 337-377, 2016, arXiv:1310.3472.

[10] 春日 真人，100 年の難問はなぜ解けたのか—天才数学者の光と影 (新潮文庫)，新潮社 (2011).

[11] 松本 幸夫，多様体の基礎 (基礎数学 5)，東京大学出版会 (1988).

[12] J.Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 149, 2006.

[13] 谷口 雅彦, 奥村 善英，双曲幾何学への招待—複素数で視る， 培風館（1996）.

[14] W. P. Thurston. *The Geometry and Topology of 3-Manifolds.* Lecture Notes. Princeton University, 1978.

[15] M. Thistlethwaite, *Cusped hyperbolic manifolds with 8 tetrahedra*, `http://www.math.utk.edu/~morwen/8tet/`, October 2010.

[16] Tokyo Institute of Technology, The Global Scientific Information and Computing Center, TSUBAME, `http://tsubame.gsic.titech.ac.jp/en`.

[17] J. R Weeks, *Convex hulls and isometries of cusped hyperbolic 3-manifolds*, Topology and its Applications 52 (1993), no. 2, 127-149.