

日本応用数理学会
三部会連携「応用数理セミナー」

FUJITSU

shaping tomorrow with you

電子機器装置の大規模変形応力解析に 対する内点法の応用

富士通アドバンステクノロジー株式会社

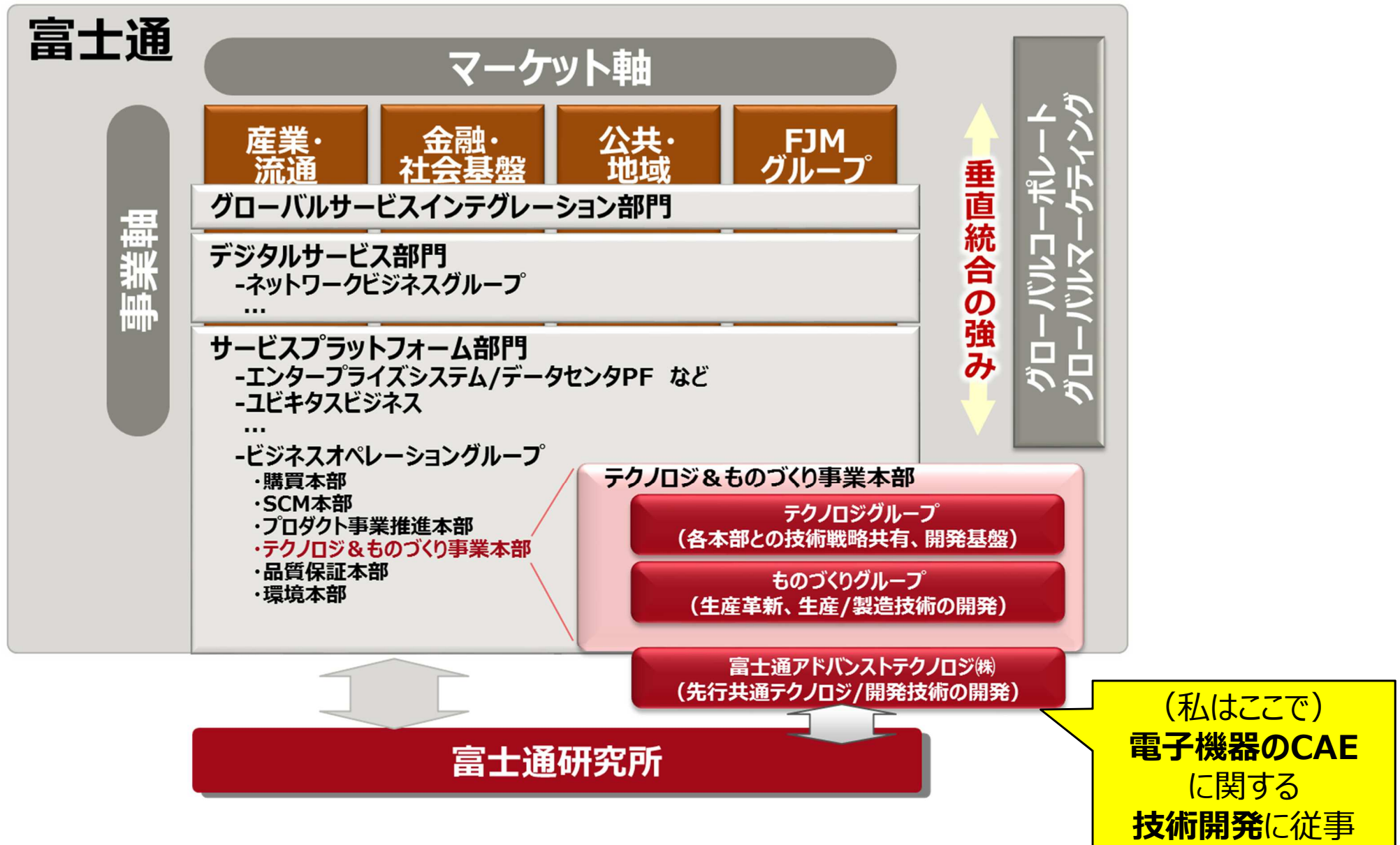
稲垣和久

2016年12月27日

1. はじめに
2. 内点法による接触解析
 1. 定式化と解法
 2. 主双対内点法による接触解析
 3. Mehrotraの予測子修正子法による接触解析
 4. 増分解析におけるwarm-start法の適用
3. 大規模並列接触解析
 1. マスタースレーブ要素による大規模並列化
4. まとめと今後の課題

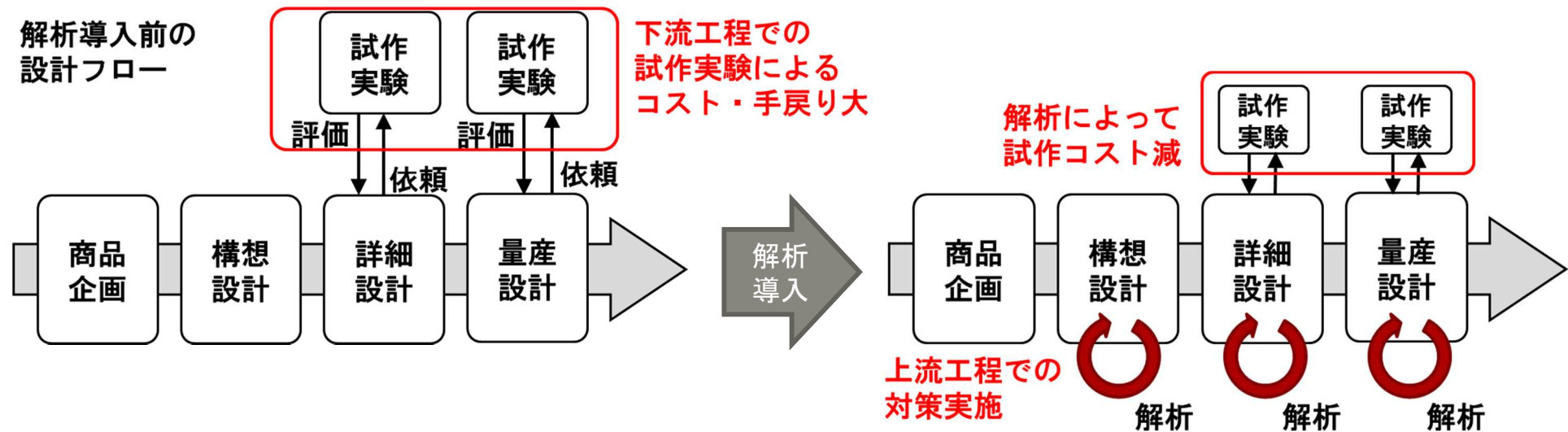
はじめに

■ 富士通グループにおける先行共通テクノロジー・開発技術の開発を担う



CAE(Computer Aided Engineering)

- 計算機を用いたシミュレーションで、製品の設計、製造や
工程設計の事前検討を支援することにより、下記の効果を得る
 - 設計品質の向上
 - 製品設計期間の短縮
 - コスト削減



■ 構造設計上の課題（大元の課題）

■ 堅牢性の確保

- 製造、運搬、使用時に受ける負荷から機能部を保護する

■ 要求仕様の実現

- 軽薄短小、低コスト
- 防水などの付加機能

・運搬機会の増加
・構成部品自体の軽薄短小化
→ 構造設計のコストは年々増大

■ 短い開発期間：企画～量産約6か月（cf. 自動車：約15か月）

携帯電話

落下衝撃や接触による
画面割れ/コネクタ破損

ノートPC

背面カバーからの圧迫による
液晶ディスプレイの割れ
開閉時の負荷によるヒンジ破損
底面側からの圧迫によるチップ部品剥離

電子機器の装置障害事例

■ 解析における課題（技術編）

- 近年解析項目・対象装置の拡大により、解析手番の問題が顕在化している
- 特にモバイル機器等の**接触解析**が課題
 - 複雑・大規模な接触問題となるため解析時間が長い
 - 部品点数が多いためモデル作成工数がかかる
 - 圧迫評価箇所多数のためケース数が多い

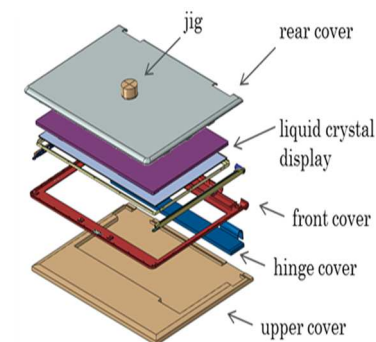
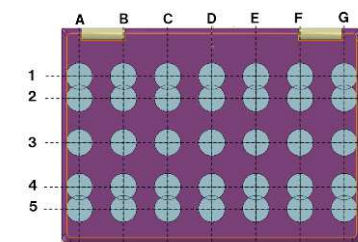


表 1.1: 電子機器の構造解析項目

	対象	現象	解析種類
動的	モバイル機器	落下による破損	動解析直接法
	サーバ・ネットワーク機器	地震動や運搬時の振動による破損	周波数応答
静的	プリント基板	リフロー時の熱反り	熱応力
	はんだ	熱疲労による接合部破損	熱応力
	モバイル機器	圧迫による画面割れ, チップ剥離	接触
	サーバ機器	開閉時のヒンジ破損 自重による変形	接触 接触

圧迫解析モデル構成の例 (ノートPC)



圧迫箇所の例

■ 解析における課題（運用編）

■ 商用コードによる解析環境では

- ライセンス費用が高額になる
- 大規模計算実行時の並列性能が得られない
- 機能不足への対処が難しい

■ 課題解決のカギ = FrontISTR

■ 並列有限要素法ライブラリhecMWを基盤とする 大規模構造解析ソフトウェア

- 領域分割による高並列計算
- 接触解析含む充実した非線形解析機能
- オープンソフトウェア…コードを自由にカスタマイズ可・ライセンスコスト0
- 開発元…東大奥田研究室・FrontISTR研究会



<http://www.multi.k.u-tokyo.ac.jp/FrontISTR>

**本日の講演では、FrontISTRを活用による上記課題の
解決に向けた研究開発について紹介する**

■「数理」「コンピューティング」「実用」の3「ある」講演

■ 数理

- 連続体力学
- 有限要素法 (FEM)
- 内点法

■ コンピューティング

- 大規模並列FEM
- 接触解析の並列化

■ 実用

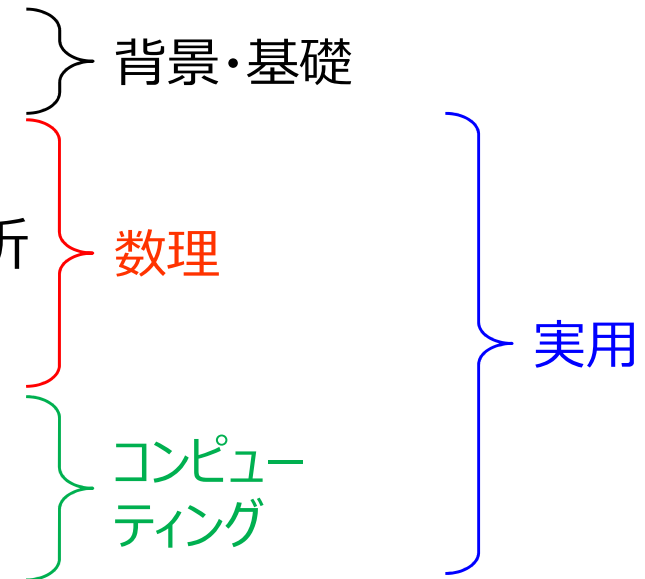
- 電子機器向けCAE
- 解析ツールとして提供中

①元々私は数理の人間
(修士までは数理情報学専攻で、数値積分法の収束性など研究をしていました)

②富士通(株)入社後、
電子機器向けの大規模
解析技術開発に従事

③解析における課題解決に、数理専攻時代に知った内点法が
使えそう…と思い、解析技術の研究開発を行ってきました

1. はじめに
2. 内点法による接触解析
 1. 定式化と解法
 2. 主双対内点法による接触解析
 3. Mehrotraの予測子修正子法による接触解析
 4. 増分解析におけるwarm-start法の適用
3. 大規模並列接触解析
 1. マスタースレーブ要素による大規模並列化
4. まとめと今後の課題



内点法による接触解析

1. はじめに

2. 内点法による接触解析

1. 定式化と解法

2. 主双対内点法による接触解析

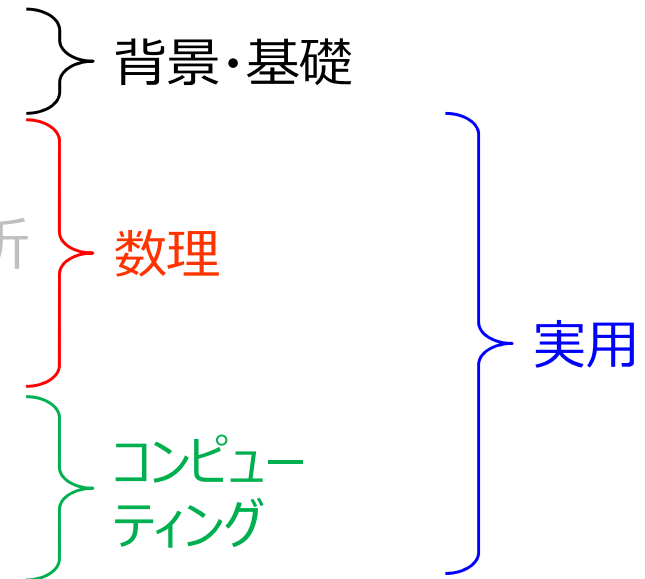
3. Mehrotraの予測子修正子法による接触解析

4. 増分解析におけるwarm-start法の適用

3. 大規模並列接触解析

1. マスタースレーブ要素による大規模並列化

4. まとめと今後の課題



基礎方程式(静解析・摩擦なし)

■ 連続体の釣合方程式を…

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Omega^{(k)}, \quad \# \text{ 釣合方程式}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{on } \Gamma_B^{(k)}, \quad \# \text{ 変位境界条件}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{on } \Gamma_t^{(k)}, \quad \# \text{ 荷重境界条件}$$

■ 接触・結合制約のもとで解く

■ 接触境界条件

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_c \equiv t_N \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_c^{(k)},$$

■ 非貫入制約 (KKT条件)

$$g_N \geq 0, \quad \# \text{ 接触ギャップ}$$

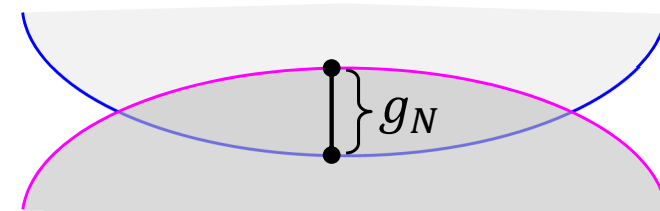
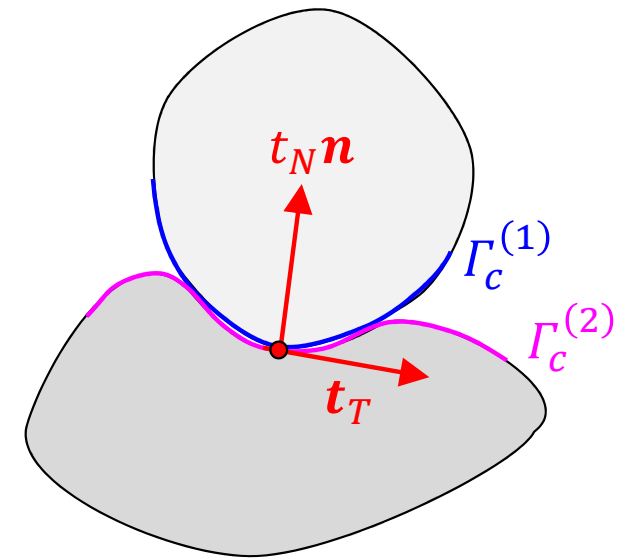
$$t_N \geq 0, \quad \# \text{ 法線方向接触圧}$$

$$g_N t_N = 0,$$

■ 結合拘束 (ねじ止め等の模擬)

$$\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(P)} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_{tie}^{(1)}$$

$\Gamma_{tie}^{(2)}$ への投影点と変位が一致



g_N : 接触ギャップ (貫入時は負値)

- ギャップが0で接触圧が発生(>0)
- ギャップが存在(>0)して接触圧が0
のいずれかであることを意味している

■ 有限要素法による離散化

■ 釣合方程式から仮想仕事式（弱形式）を導出

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega^{(k)}} \overset{\text{内力}}{\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D}} dv = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega^{(k)}} \overset{\text{体積力}}{\rho \mathbf{g} : \delta \mathbf{u}} dv + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_t^{(k)}} \overset{\text{表面力}}{\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}} ds + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_c^{(k)}} \overset{\text{接触力}}{\mathbf{t}_c \cdot \delta \mathbf{u}} ds$$

■ 各仮想仕事を、有限要素離散化したものに置き換えた式を解く 詳細な定義、導出は本講演では割愛するが、最終的に 節点変位ベクトルによって以下のように近似される

$$\bullet \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega^{(k)}} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} dv \approx \delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q}(\mathbf{u})$$

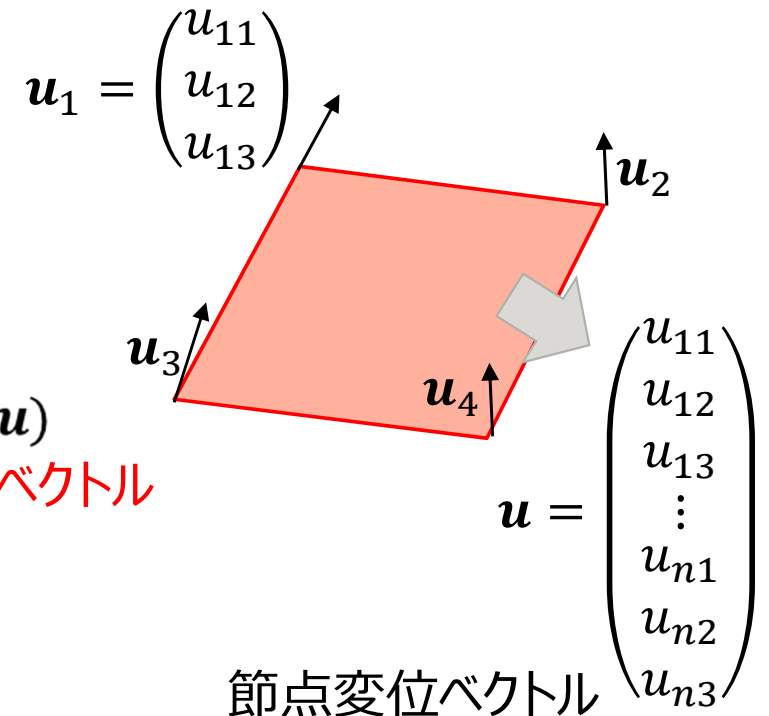
内力ベクトル

$$\bullet \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega^{(k)}} \rho \mathbf{g} : \delta \mathbf{u} dv + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_t^{(k)}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} ds \approx \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

外力ベクトル

$$\bullet \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_c^{(k)}} \mathbf{t}_c \cdot \delta \mathbf{u} ds \approx \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_c(\mathbf{t}_N, \mathbf{u})$$

接触力ベクトル



■ Node to Surfaceの離散化

- 接触面をマスター面、スレーブ面に区分
- スレーブ面の節点が、各マスター要素面に貫入しない
- 接触力と接触制約…スレーブ節点ごとに1つ

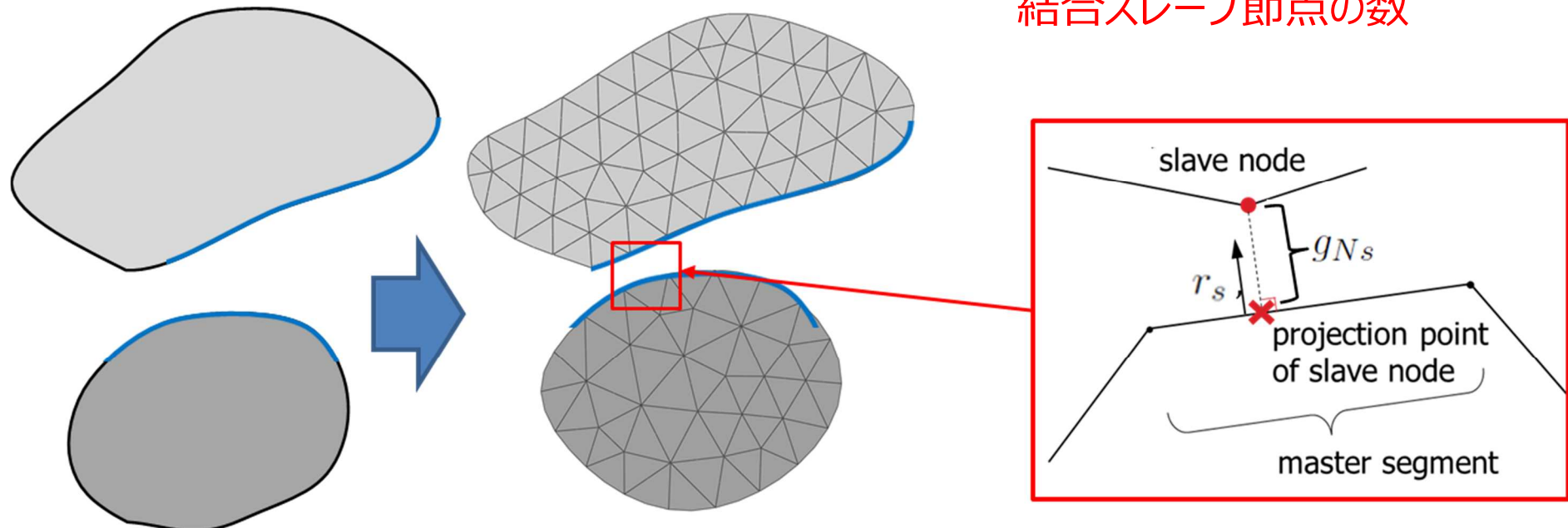
$$g_{N,s} \geq 0, t_{N,s} \geq 0, g_{N,s}t_{N,s} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n_C)$$

- 結合拘束も同様にスレーブ節点ごとに1つ与えられ、スレーブ節点の変位がマスター要素面の投影点の変位と一致するよう拘束される

接触スレーブ節点の数

$$\mathbf{u}_s - \mathbf{u}^{(P)} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n_M)$$

結合スレーブ節点の数



■ 離散化された接触条件

■ 接触ギャップ

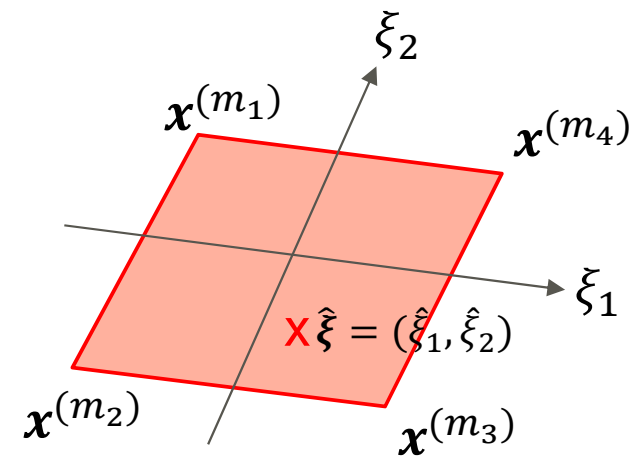
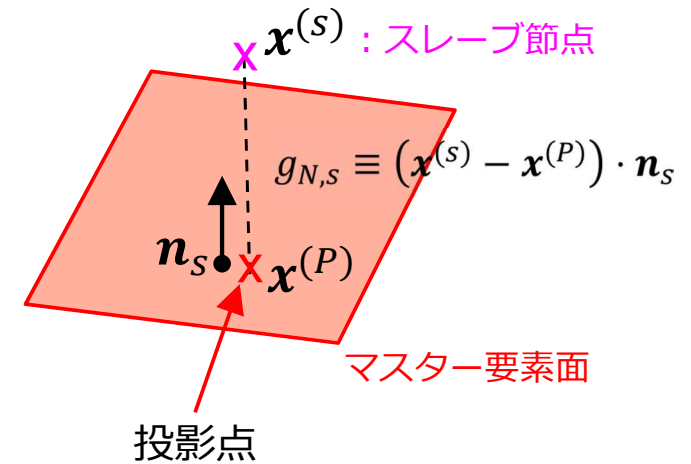
$$g_{N,S} \equiv (\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{x}^{(P)}) \cdot \mathbf{n}_S$$

- $\mathbf{x}^{(s)}$: スレーブ節点座標
- $\mathbf{x}^{(P)}$: マスター投影点座標
- \mathbf{n}_S : 法線方向単位ベクトル

■ マスター投影点座標

$$\mathbf{x}^{(P)} = \sum_{j=1}^{n_e} N_j(\hat{\xi}) \mathbf{x}^{(m_j)}$$

- $\hat{\xi}$: 投影点の要素面内座標
- N_j : 要素面の形状関数 (各節点の重み)
- $\mathbf{x}^{(m_j)}$: 要素面構成節点座標



■ 離散化された接触条件

■ 接触力ベクトル

$$F_c(t_N, \mathbf{u}) = \sum_{s=1}^{n_C} t_{N,s} \mathbf{T}_s$$

\mathbf{T}_s : 接触方向の射影ベクトル

$$\mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n}_s \\ 0 \\ \vdots \\ -N_1 \mathbf{n}_s \\ -N_2 \mathbf{n}_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

スレーブ節点
マスター節点

■ このとき $g_{N,s} = \mathbf{T}_s^T \mathbf{x} = \mathbf{T}_s^T (\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \mathbf{T}_s^T \mathbf{u} + h_s$

■ 結合拘束条件

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_s - \mathbf{u}^{(P)} \\ &= \mathbf{u}_s - \sum_{j=1}^{n_e} N_j(\hat{\xi}) \mathbf{u}^{(m_j)} \\ &= \mathbf{B}_s^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

\mathbf{B}_s : 結合制約の係数ベクトル

初期ギャップ

$$\mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -N_1 & 0 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 \\ 0 & 0 & -N_1 \\ -N_2 & 0 & 0 \\ 0 & -N_2 & 0 \\ 0 & 0 & -N_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

スレーブ節点
マスター節点

マスタースレーブの
構成節点以外の
成分は0

■ 最終的に解くべき式は次の通り

$$Q(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}) - \sum_{s=1}^{n_C} t_{N,s} \mathbf{T}_s(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \# \text{ 接触力を含む釣合方程式}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \# \text{ 変位境界条件}$$

$$\mathbf{T}_s^T \mathbf{u} + h_s \geq 0,$$

$$t_{N,s} \geq 0,$$

$$t_{N,s} (\mathbf{T}_s^T \mathbf{u} + h_s) = 0, (s = 1, 2, \dots, n_C) \quad \# \text{ 非貫入制約}$$

$$\mathbf{B}_s^T \mathbf{u} = \mathbf{0} (s = 1, 2, \dots, n_M). \quad \# \text{ 結合制約}$$

■ 特に微小変形を仮定し、変位境界条件処理を行った場合

$$K\mathbf{u} - F - \sum_{s=1}^{n_C} t_{N,s} \mathbf{T}_s = \mathbf{0}, \quad \# \text{ 釣合方程式}$$

K: 剛性行列 (正定値対称・疎行列)

$$\mathbf{T}_s^T \mathbf{u} + h_s \geq 0,$$

$$t_{N,s} \geq 0,$$

$$t_{N,s} (\mathbf{T}_s^T \mathbf{u} + h_s) = 0, (s = 1, 2, \dots, n_C) \quad \# \text{ 非貫入制約}$$

$$\mathbf{B}_s^T \mathbf{u} = \mathbf{0} (s = 1, 2, \dots, n_M). \quad \# \text{ 結合制約}$$

- 離散化された接触問題は、次の制約付き最適化問題のKKT条件になっている

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \mathbf{I}(\mathbf{u}), \mathbf{I}(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\ & \mathbf{T}_s^T \mathbf{u} + h_s \geq 0 (s = 1, 2, \dots, n_C), \\ & \mathbf{B}_s^T \mathbf{u} = 0 (s = 1, 2, \dots, n_M). \end{aligned}$$

ポテンシャルエネルギー

非貫入条件

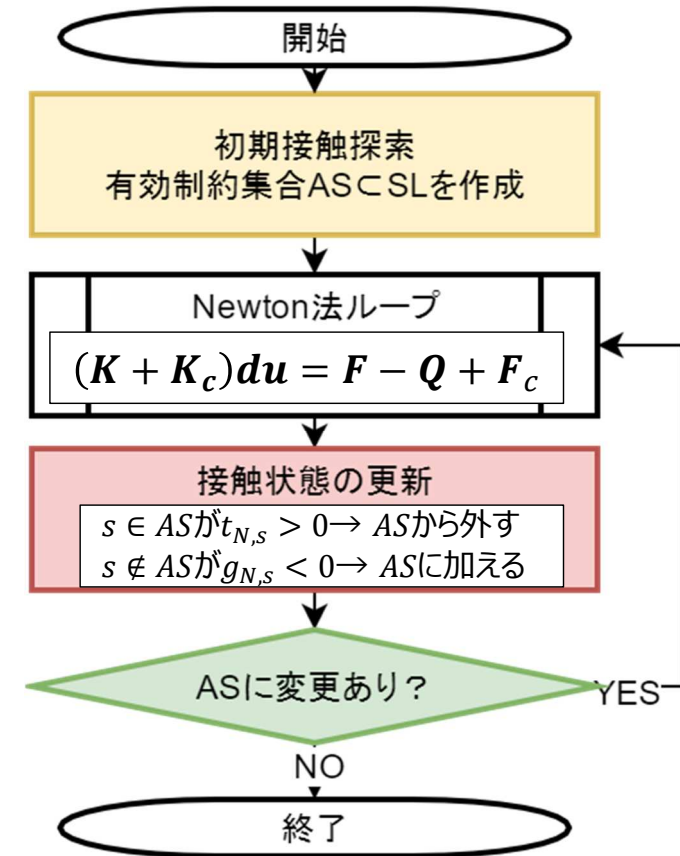
結合拘束条件

- 有限要素接触解析では、上の問題に最適化問題の解法を適用して解を得る

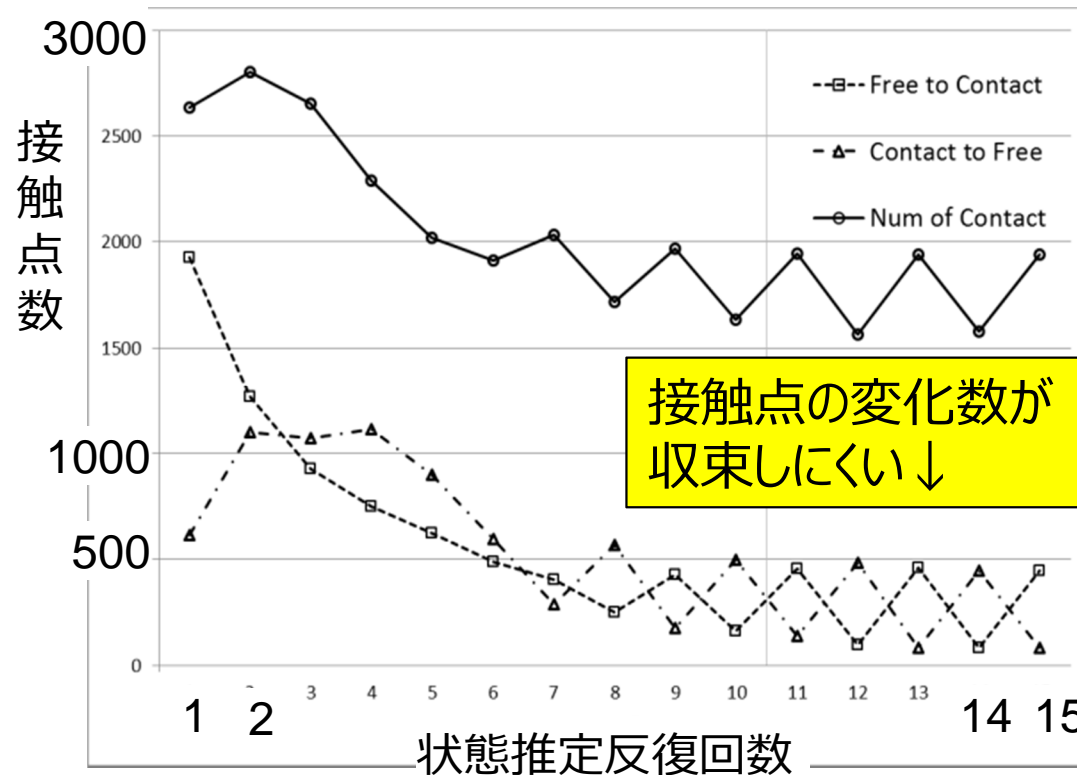
■ 非貫入制約の処理

■ FrontISTRでは**有効制約法**によって
等式制約問題に帰着する

- 貫入ギャップが0となるべきスレーブ節点集合 $AS \subset SL$ を、試行錯誤的に決定する
- 各試行の中では等式制約問題。
FrontISTRでは**Lagrange乗数法**
または**拡張Lagrange乗数法**で解く



- 積層する薄板部品のため接触範囲が広く、試行錯誤的な接触状態の決定が困難



電子機器モデルでの接触点数の推移例

(自由度と比べて)
多数の接触制約を含む接触問題について
効率的な解法を開発する必要がある

■ 主な接触解析手法

※実装○
=自由度数の変化無

有効接触点の探索方針	変数	制約条件の処理	制約	行列	実装	実用上の課題
有効制約法と 等式制約問題の解法を 組み合わせ	主変数のみ ※主変数 ⇔変位, 双対変数 ⇔接触力	Penalty法	×近似的	×悪条件	○容易	×制約精度の確認要
		拡張Lagrange法 (乗数法)	△近似的・ 反復改良可	△Penalty次 第	○容易	×反復が増える
		変数直接消去	○厳密	○共有節点相 当	×煩雑	×線形のみ
	主変数と 双対変数	Lagrange乗数法	○厳密	△不定値	×煩雑	
不等式制約 を直接扱う	主変数のみ	バリア関数法	×近似的	×悪条件	○容易	×制約精度の確認要
		接触力関数/ ユーザ定義関数	×近似的	×悪条件	○容易	×汎用性無 ×制約精度の確認要
	主変数と 双対変数	(主双対)内点法	△近似的・ 調整可	×悪条件	○容易	

既存の接触問題の解法

■ 主な接触解析手法

※実装○
=自由度数の変化無

有効接触点の探索方針	変数	制約条件の処理	制約	行列	実装	実用上の課題
有効制約法と等式制約問題の解法を組み合わせ	主変数のみ	Penalty法	× 近似的	× 悪条件	○ 容易	× 制約精度の確認要
	※主変数 ⇔ 変位, 双対変数	拡張Lagrange法 (乗数法)	△ 近似的・反復改良可	△ Penalty次第	○ 容易	× 反復が増える
不等式制約を直接扱う	主変数のみ	バリア関数法	× 近似的	× 悪条件	○ 容易	× 制約精度
		接触力ユーザー				
	主変数と双対変数	(主双対)内点法	△ 近似的・調整可	× 悪条件	○ 容易	

電子機器の接触解析には接触状態を組合せ的に扱わない方法が適していると考えられる

- ・大規模問題向けの解法として注目されている
- ・手法の改良が進められている

→電子機器向けの接触解析手法として検討する

■ 内点法による接触解析

P.W. Christensen, A. Klarbring, J.S. Pang, and N. Strömberg. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 42, No. 1, pp. 145-173, 1998.

主双対内点法接触（弾性体と剛体）の定式化の初出。semismooth Newton法と比較し、収束性安定性ともに内点法は劣ると結論。ただし数値実験に用いたモデルは自由度、接触制約共に小さい

P. G Tanoh, Y Renard, and D Noll. Computational experience with an interior point algorithm for large scale contact problems. Optimization Online, 2004.

大規模（約2万DOF）モデルで主双対内点法接触の高い収束性を数値実験により確認

宮村倫司, 寒野善博, 大崎純. 内点法による接触問題の求解に関する検討. 計算力学講演会講演論文集, Vol. 2006, No. 19, pp. 69-70, nov 2006.

解法は主内点法であるが弾性体同士（node to node）の接触問題へ拡張。平板同士の接触問題で内点法接触の有効性を確認

T. Miyamura, Y. Kanno, and M. Ohsaki. Combined interior-point method and semismooth newton method for frictionless contact problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 81, No. 6, pp. 701-727, 2010.

途中から有効制約法にシフトして収束性を改善する提案

■ 内点法（収束改善に関する議論）

■ 主双対内点法の提案

M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise. Progress in mathematical programming interior-point and related methods. chapter A Primal-dual Interior Point Algorithm for Linear Programming, pp. 29-47. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1988.

線形計画問題に対する主双対内点法の提案

■ 収束の高速化

S. Mehrotra. On the implementation of a primal-dual interior point method. SIAM Journal on optimization, Vol. 2, No. 4, pp. 575-601, 1992.

予測子・修正子法の提案。主双対内点法より実際の問題を早く解けるとして、多くの商用コードで採用される。

■ 良い初期解の利用

H. Y. Benson and D. F. Shanno. An exact primal-dual penalty method approach to warmstarting interior-point methods for linear programming. Comput. Optim. Appl., Vol. 38, No. 3, pp. 371-399, 2007.

H.Y. Benson and D.F. Shanno. Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: regularization and warmstarts. Computational Optimization and Applications, Vol. 40, No. 2, pp. 143-189, 2008

良い初期解を利用して反復回数を削減する

本研究の位置づけ(接触解法)

■ 内点法接触の電子機器接触への拡張と収束性改善の提案

接触 \ 収束性	低	高
線形解析 Node to Rigid接触 Node to Node接触	Christensen, 1998 Tanoh, 2006 (主双対内点法)	Miyamura, 2010 有効制約シフト
線形解析 Node to Surface接触 結合接触の考慮 + 電子機器で検証	本講演2.2	本講演2.3 予測子修正子法(Mehrotra, 1992)による高速化
大変形・増分解析 Node to Surface接触 結合接触の考慮 + 電子機器で検証		本講演2.4 warm-start法(Benson 2008)による高速化

1. はじめに

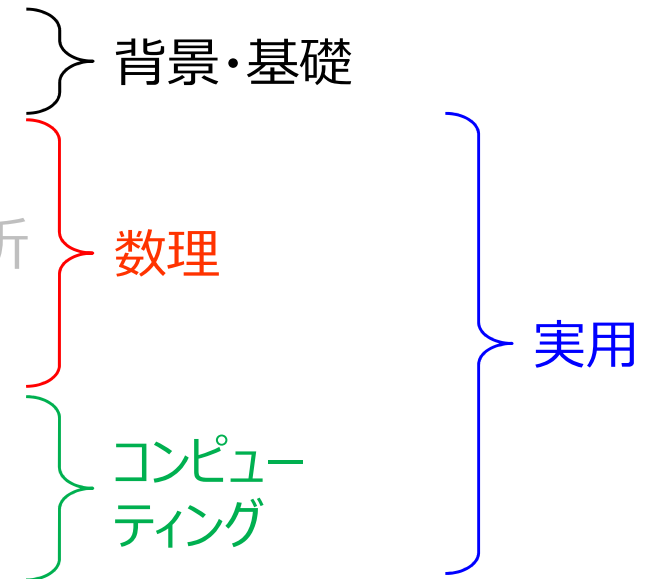
2. 内点法による接触解析

- 1. 定式化と解法
- 2. 主双対内点法による接触解析
- 3. Mehrotraの予測子修正子法による接触解析
- 4. 増分解析におけるwarm-start法の適用

3. 大規模並列接触解析

- 1. マスタースレーブ要素による大規模並列化

4. まとめと今後の課題



■ 以下の不等式制約付き最適化問題を解く

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_C) \end{aligned}$$

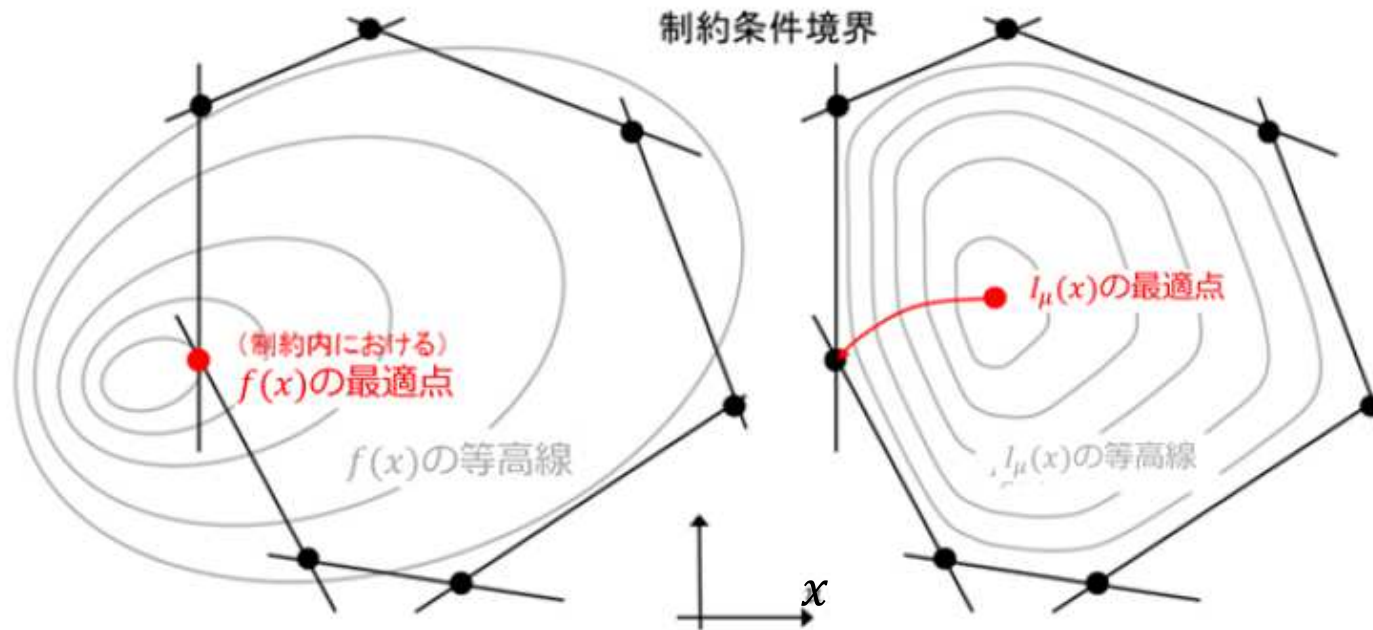
■ 基本的な考え方

■ 対数バリア関数の導入

$$I_\mu(\boldsymbol{x}) \equiv f(\boldsymbol{x}) - \mu \sum_{i=1}^{n_C} \log g_i(\boldsymbol{x})$$

- 最適点を制約境界から遠ざける
- $\mu \rightarrow 0$ とすると I_μ を最小化する問題の解は元問題の解に収束する

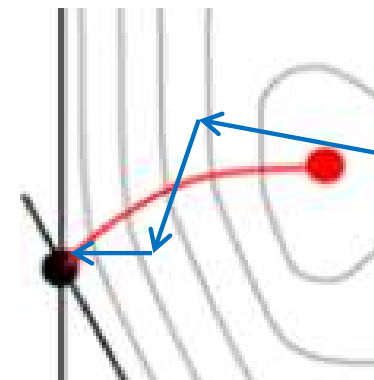
■ 対数バリア関数のイメージ



■ 基本戦略

- 次の手続きを反復し、元問題の最適値を得る
1. l_μ のNewton方向に進む 2. μ を小さくする

1. で線形方程式を解く部分の負荷が最も高い



- 接触問題の支配方程式（線形弾性体・摩擦無微小滑り）

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F}^T \mathbf{u}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n_C),$$
$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{u} = 0 \quad (i = 1, \dots, n_M).$$

- 結合拘束をPenalty法で無制約化し、主双対内点法を適用する

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad I(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{u}^T \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{u}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_C),$$

- 対応：

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{u}, \quad f(\mathbf{x}) \leftrightarrow I(\mathbf{u}), \quad g_i(\mathbf{x}) \leftrightarrow \mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i$$

■ バリア問題の1次の最適条件

$$\begin{aligned} Ku + \rho \sum_{i=1}^{n_M} B_i B_i^T u - F - \sum_{i=1}^{n_C} T_i r_i &= 0, \\ r_i (T_i^T u + h_i) &= \mu \quad (i = 1, 2, \dots, n_C), \quad \dots(1) \\ r_i &> 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_C), \\ T_i^T u + h_i &> 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_C). \end{aligned}$$

■ ここで r_i は(1)式を満たす変数として定義される

- 接触力 $t_{N,i}$ に対応する量
- 主双対内点法では独立変数として扱う

■ 上の系に対して「Newton方向 $(\Delta u, \Delta r)$ の計算」と「 μ の縮小」処理を反復する

■ Newton方向の計算

- 通常のNewton法の手続きと同じで、 \mathbf{u} , \mathbf{r} の各成分で微分する

$$\left(\mathbf{K} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \right) \Delta \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n_C} \mathbf{T}_i \Delta r_i = - \left(\mathbf{K} \mathbf{u} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{u} - \mathbf{F} - \sum_{i=1}^{n_C} \mathbf{T}_i r_i \right),$$

$$r_i \mathbf{T}_i^T \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i) \Delta r_i = \mu - r_i (\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n_C).$$

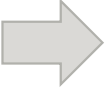
■ Newton方向の計算（プログラミング的な話）

■ FrontISTRで実装する場合、2個目の式の Δr_i について解くことにより、縮約した形にすると簡単にできる

- FrontISTRは、ペナルティ法由来の接触非ゼロ項 $\rho \mathbf{T}_i \mathbf{T}_i^T$ を剛性行列（ブロック疎行列）に足しこむ機能を持っている
- 一方、内点法の接線行列を縮約すると行列がペナルティ法と同じ非ゼロ配置になる

$$\Delta r_i = \frac{\mu - r_i \mathbf{T}_i^T \Delta \mathbf{u}}{\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i}$$

ここを ρ とすると、すべての接触制約がactiveの場合のペナルティ法のマトリクスと一致する


$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{K} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T + \sum_{i=1}^{n_C} \frac{r_i}{\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i} \mathbf{T}_i \mathbf{T}_i^T \right) \Delta \mathbf{u} \\ &= - \left(\mathbf{K} \mathbf{u} + \rho \sum_{i=1}^{n_M} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{u} - \mathbf{F} - \sum_{i=1}^{n_C} \frac{r_i}{\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i} \mathbf{T}_i \right) \end{aligned}$$

- 実装の際は、接触非ゼロ項の係数を内点法のものに差し替えるだけでよい（行列構造を再構築しなくてよいので、とても楽）

■ 解析手続き

Algorithm 2 主双対内点法による接触解析の疑似コード

収束閾値の設定 : $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$.

μ_0, η の設定 : η は $0 < \eta < 1$ の範囲で決める

$\mathbf{u}^{(0)}$ の設定 : $\mathbf{u}^{(0)}$ は $\mathbf{T}_i^T \mathbf{u}^{(0)} + h_i > 0$ を満たすようにとる.

$r_i^{(0)} = \mu_0 / (\mathbf{T}_i^T \mathbf{u}^{(0)} + h_i)$

$k = 0$

while do

$\Delta \mathbf{u} \ \Delta r_i$ を計算する

$\mathbf{T}_i^T (\mathbf{u}^{(k)} + \sigma_1 \Delta \mathbf{u}^{(k)}) + h_i > 0$ を満たすようにステップの減速率 $\sigma_1 \in (0, 1]$ を決める

$r_i^{(k)} + \sigma_2 \Delta r_i > 0 \ (i = 1, \dots, n_C)$ を満たすようにステップの減速率 $\sigma_2 \in (0, 1]$ を決める

解を更新する : $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \sigma_1 \Delta \mathbf{u}, r_i^{(k+1)} = r_i^{(k)} + \sigma_2 \Delta r_i.$

$\varphi(\mathbf{u}^{(k+1)}, r^{(k+1)}, \mu_k) < \varepsilon_1$ かつ $\mu_k < \varepsilon_2$ であれば終了

μ を更新する : $\mu_{k+1} = (\sigma\eta + (1 - \sigma))\mu_k$. ここで $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$

$k = k + 1$

end while

初期値設定

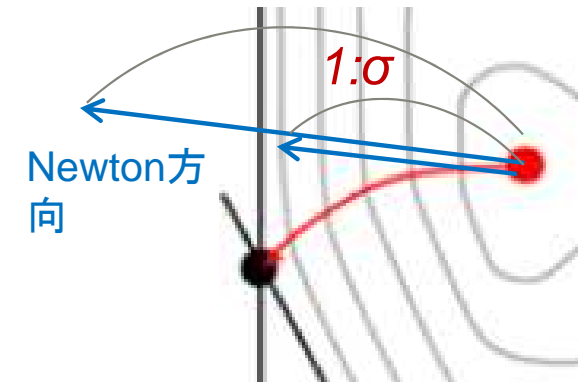
1. 縮約した行列を解いてNewton方向を
求める (最も負荷が高い)

2. 内点に留まるため減速
: ステップ幅を σ 倍

3. μ を η 倍縮小する (但し減速率に応じて調整)
: $\mu \leftarrow (\sigma\eta + (1 - \sigma))\mu$

■ 直接法ソルバを用いる場合、メインループの反復回数でほぼ処理時間が決まる

- 主双対内点法(IPM)と有効制約法 & Penalty法(ASM)による解析の手続きをFrontISTRに実装
- 数値解（変形量）及びステップ数を比較
 - ステップ数は各手法におけるメインループの反復数
- 比較条件
 - 初期 $\mu = 0.5, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$
 - μ の更新式： $\mu_{k+1} = (\sigma\eta + (1 - \sigma))\mu_k$
 - 減少率の設定： $\eta = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$
 - 結合ペナルティ：1E+6
 - 接触ペナルティ（有効制約法）：1E+7
 - 段階的に値を大きく取って必要な値を決定した

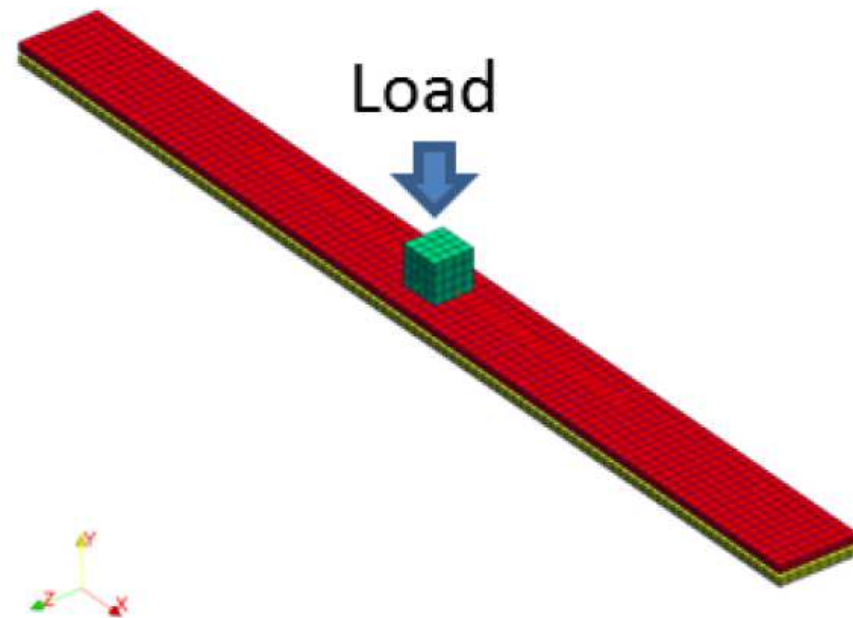
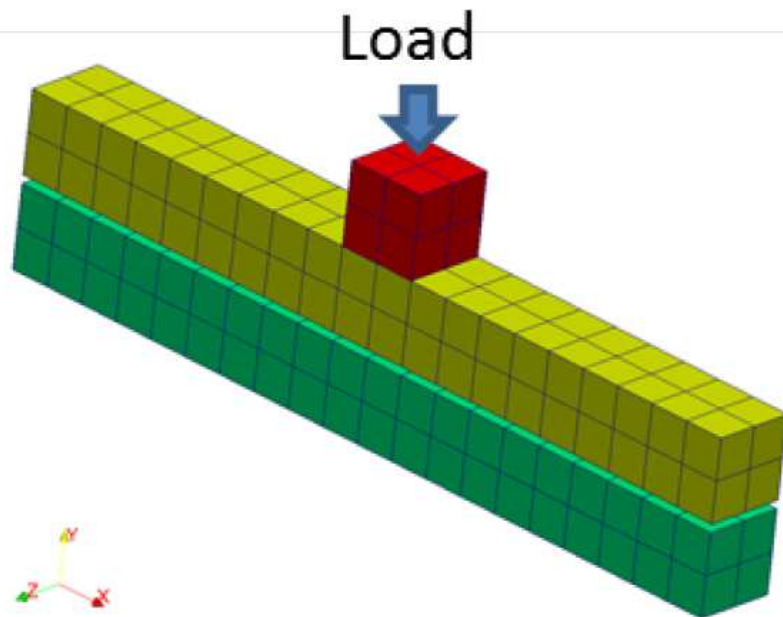


σ : 内点制約を満たすための減速の割合
 η : μ の減少率
(入力パラメータ)

■ 検証用小規模モデル 2 点

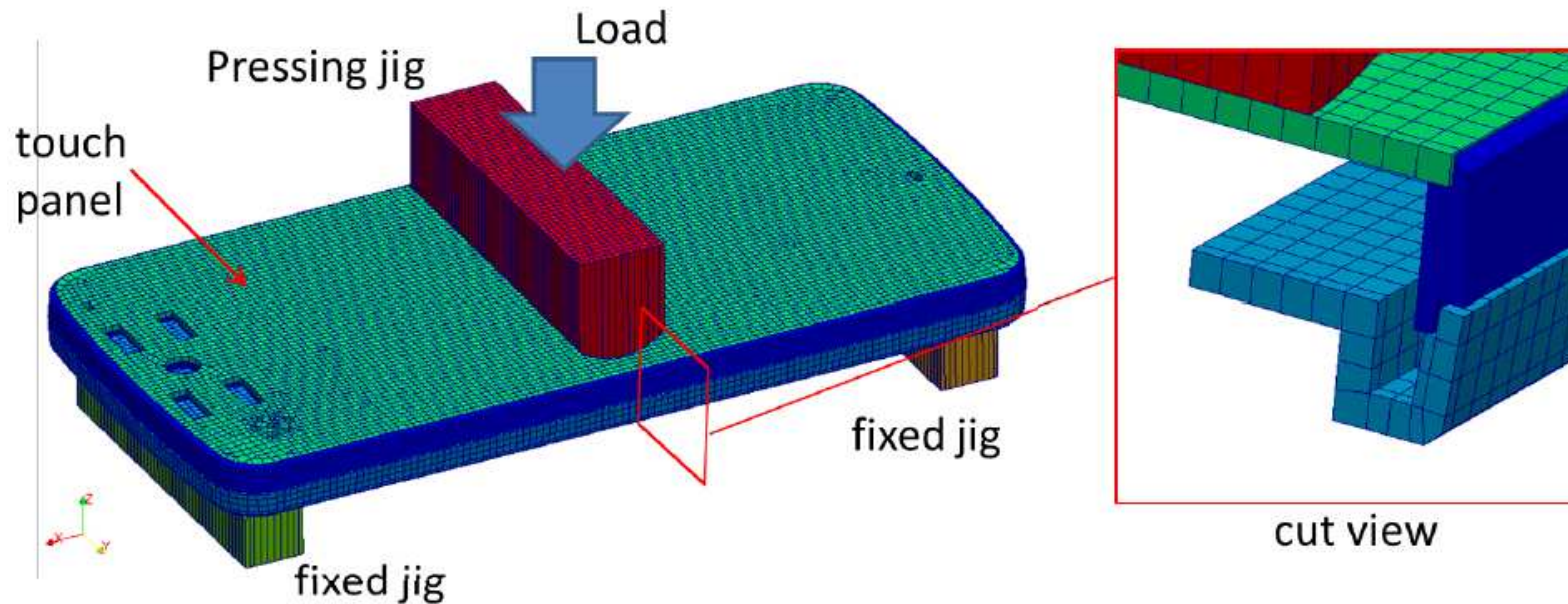
■ モデル 1 : 1,215自由度, 接触点63, 結合点9

■ モデル 2 : 11,283自由度, 接触点909, 結合点205



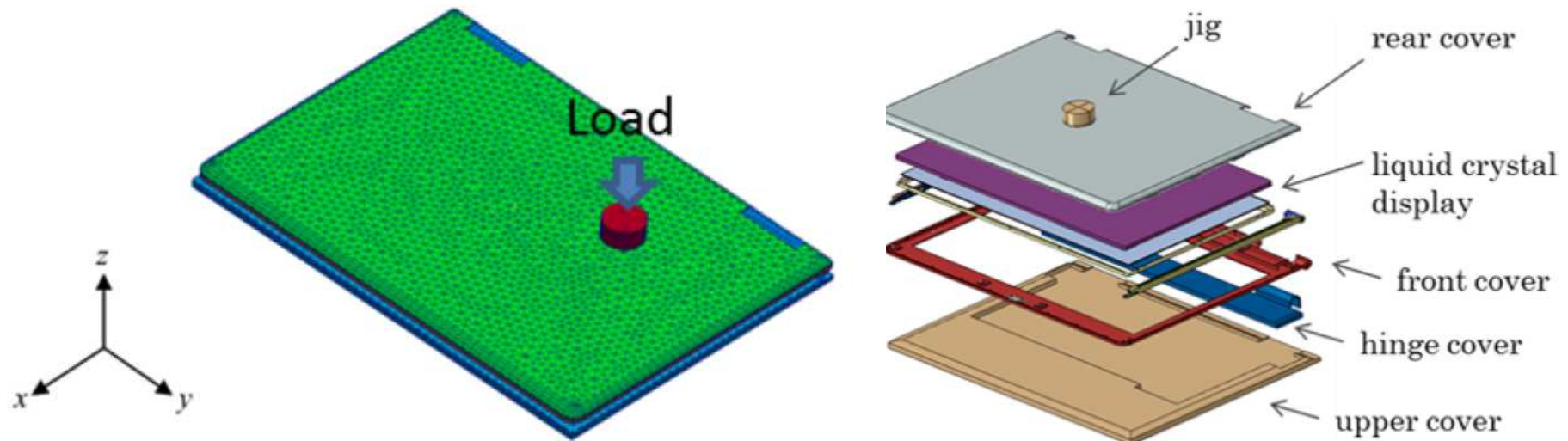
■ スマートフォンケースモデル

- 142,596自由度, 接触点2,563, 結合点535
- 曲げ試験時のパネル部でのひずみ評価が目的
- 勘合部での接触状態が結果に影響する



■ ノートパソコン液晶ガラス背面圧迫解析

- 523,426自由度, 接触点50,658, 結合点2,492
- 内部の液晶ディスプレイに規定値以上の応力が発生しないか見る

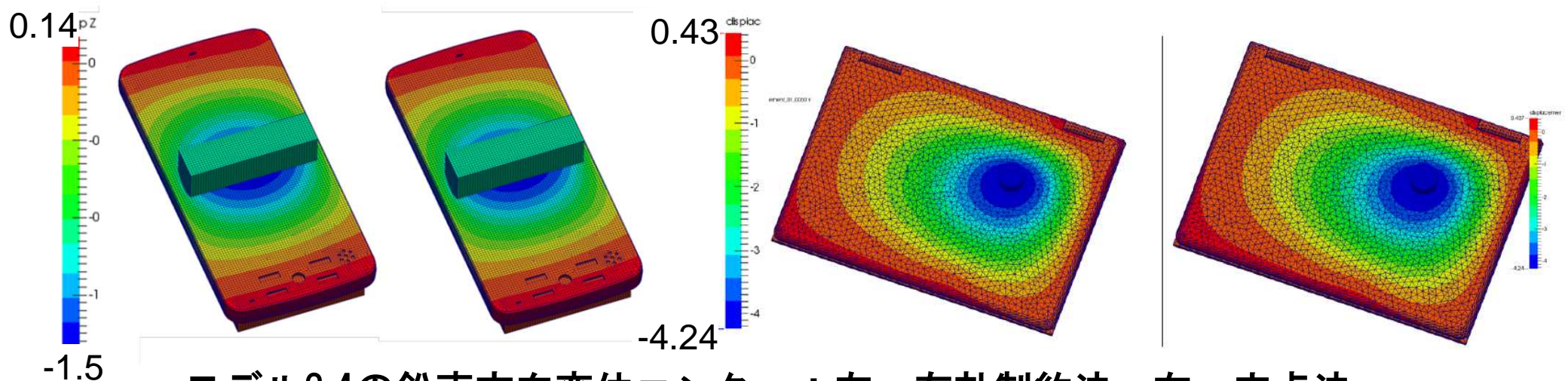


■ 変形 (鉛直方向変位)

- 内点法(IPM)と有効制約法(ASM)で一致を確認

表 3.3: 各モデルでの最大節点変位

	IPM					ASM
	η					
	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	-
モデル 1	0.3224	0.3224	0.3224	0.3224	0.3224	0.3224
モデル 2	0.2432	0.2432	0.2432	0.2432	0.2432	0.2432
モデル 3	1.496	1.496	1.496	1.496	1.496	1.496
モデル 4	4.235	4.235	4.235	4.235	4.235	4.234



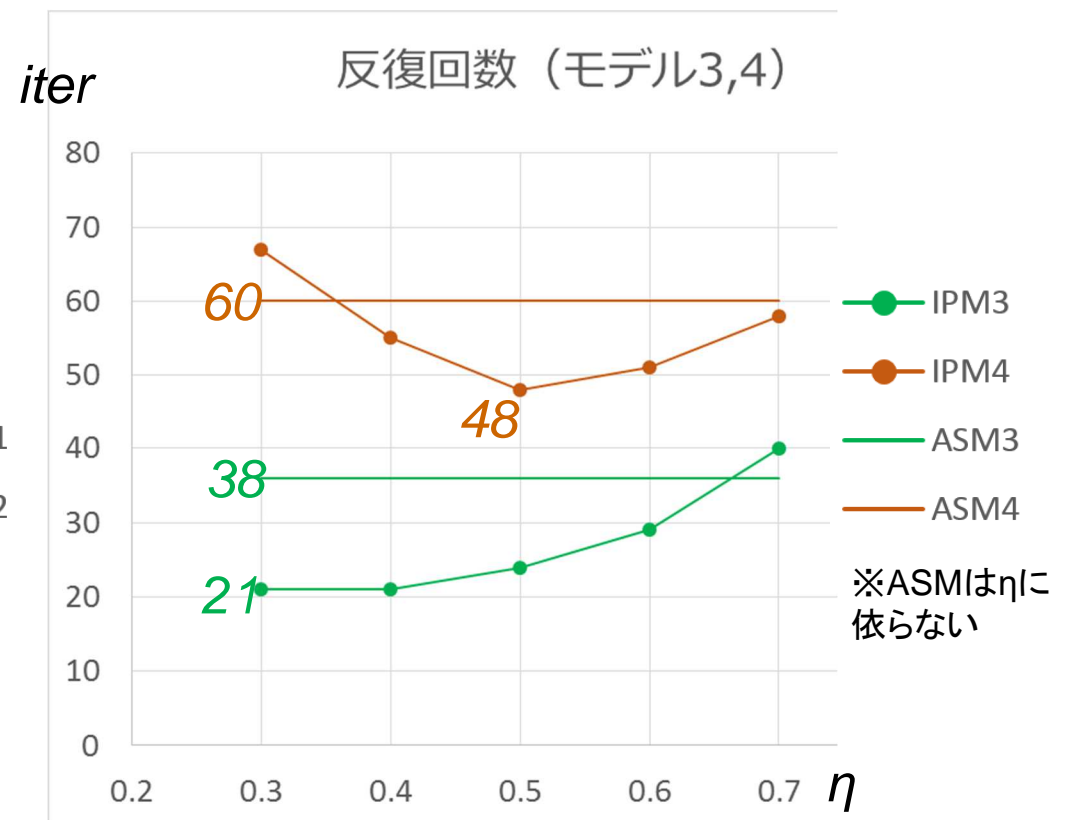
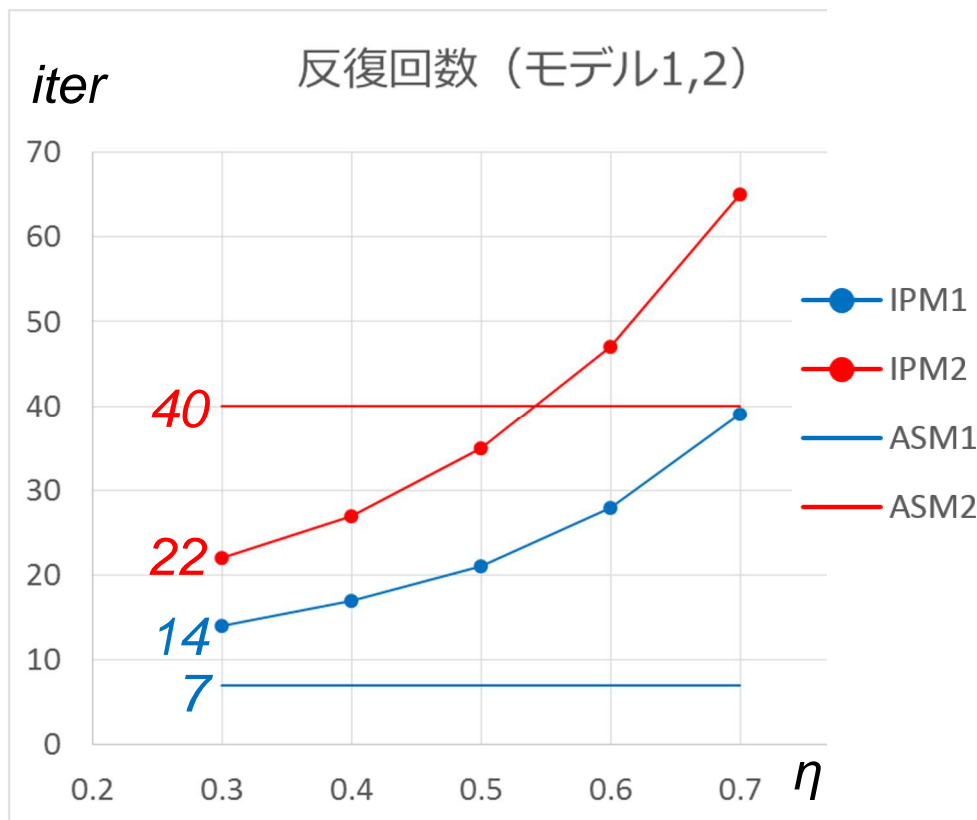
モデル3,4の鉛直方向変位コンター：左・有効制約法、右・内点法

■ 反復回数

■ 内点法(IPM)の反復回数は η に依存

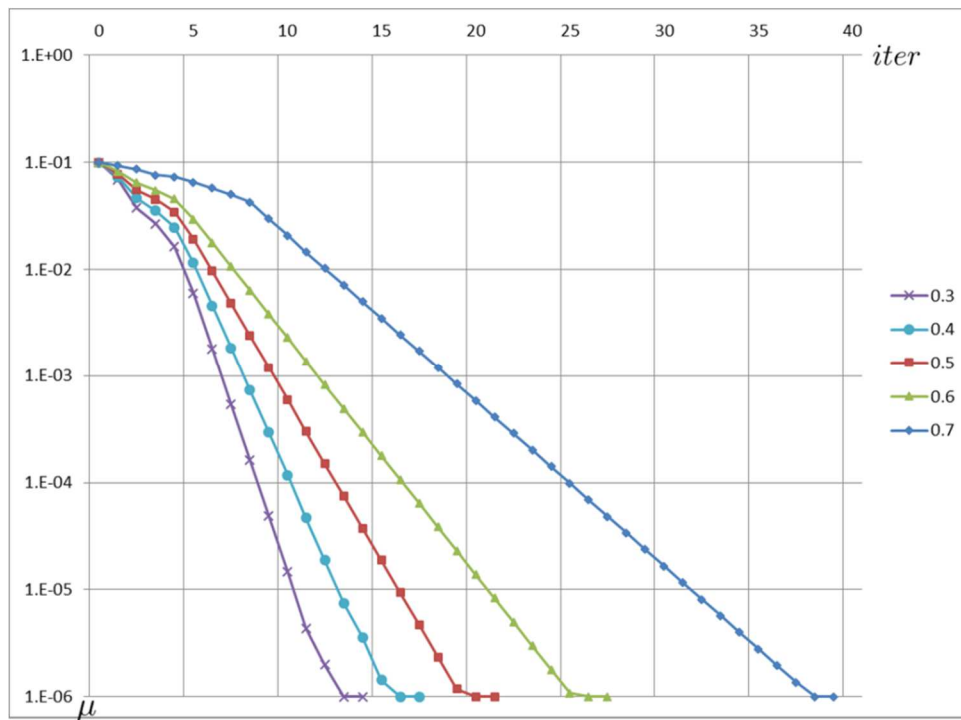
- η が小さいほど収束は速いが、モデル4は $\eta=0.5$ を境に収束性低下

■ 単純なモデル1を除いては、最良のパラメータを用いた場合で約20%から50%程度反復回数減

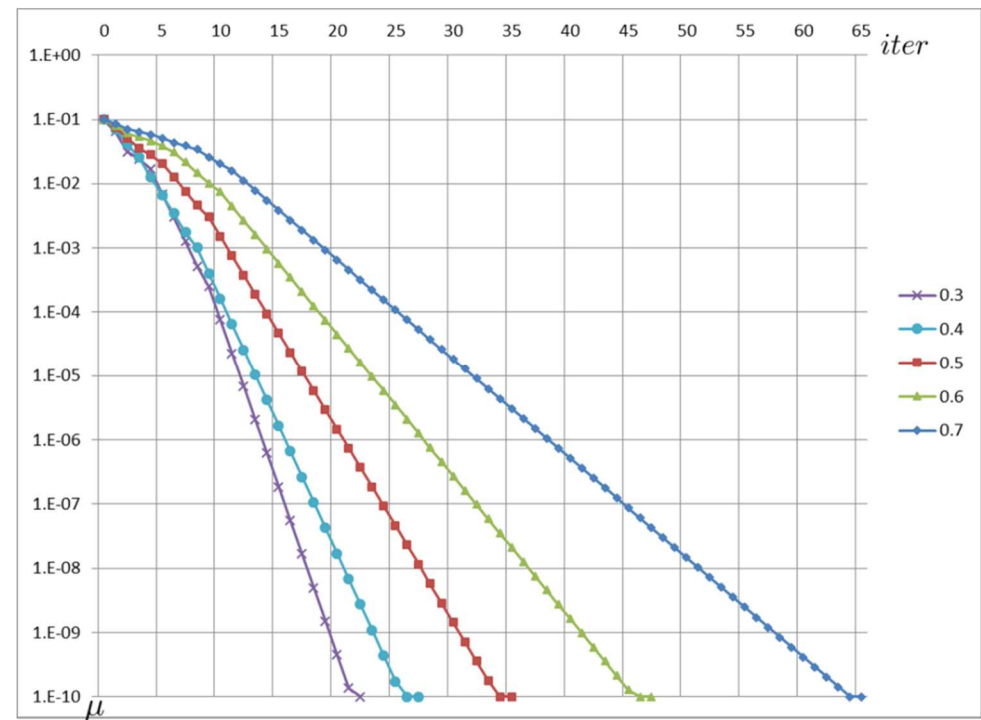


■ バリアパラメータ μ の収束履歴(1/2)

- 簡易モデルの場合 μ は等比級数的に減少
→ ほぼ $\sigma=1$ であり、より大きな η を取れる



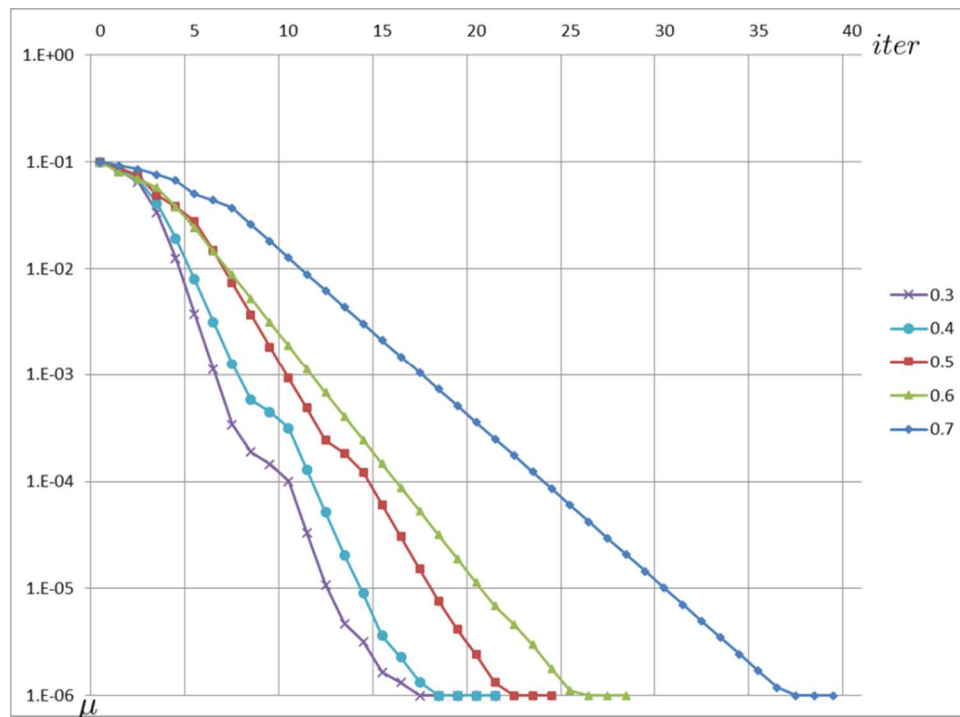
モデル1



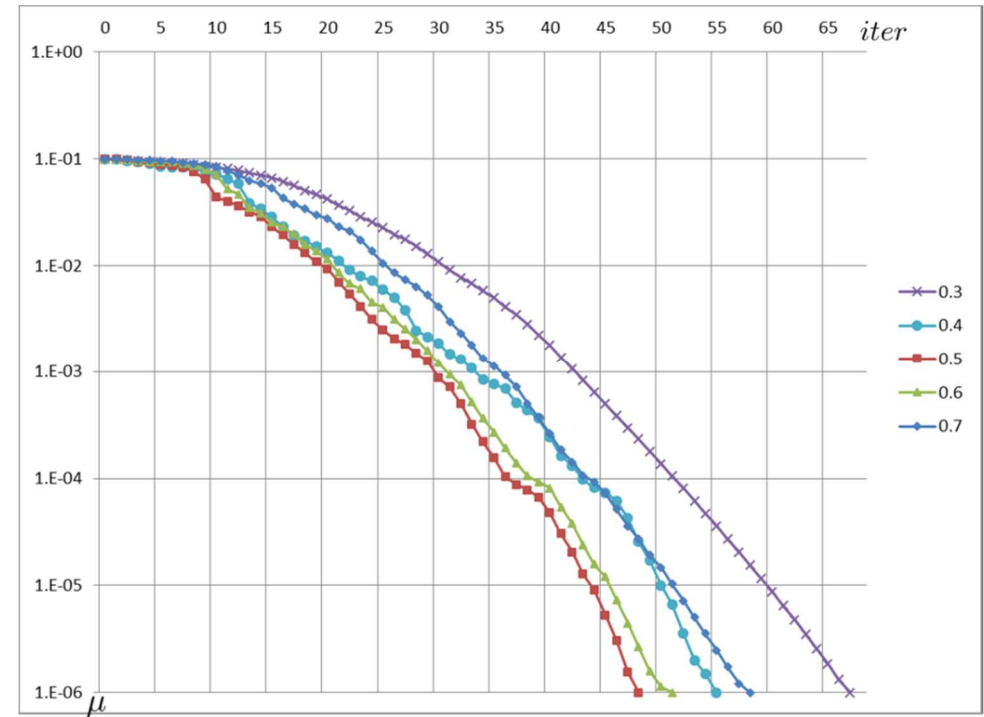
モデル2

■ バリアパラメータ μ の収束履歴(2/2)

- 複雑なモデルでは、 η を過剰に小さくすると
(減速によって) μ の減少が緩和する
→適切な η の設定が課題



モデル3



モデル4

内点法はどのようなモデルで有利か

- 荷重を徐々に変えて接触範囲を変化させ、内点法 ($\eta=0.3$) と有効制約法の反復回数を比較
 - 接触対の個数※に対し、内点法はほぼ一定の反復回数
 - 接触範囲が広い（本モデルでは約200以上で）場合に内点法が有利となる

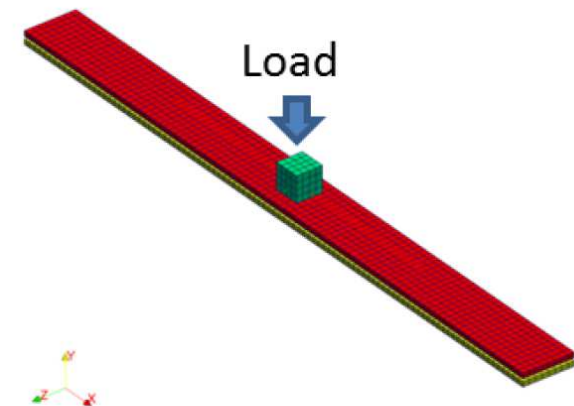
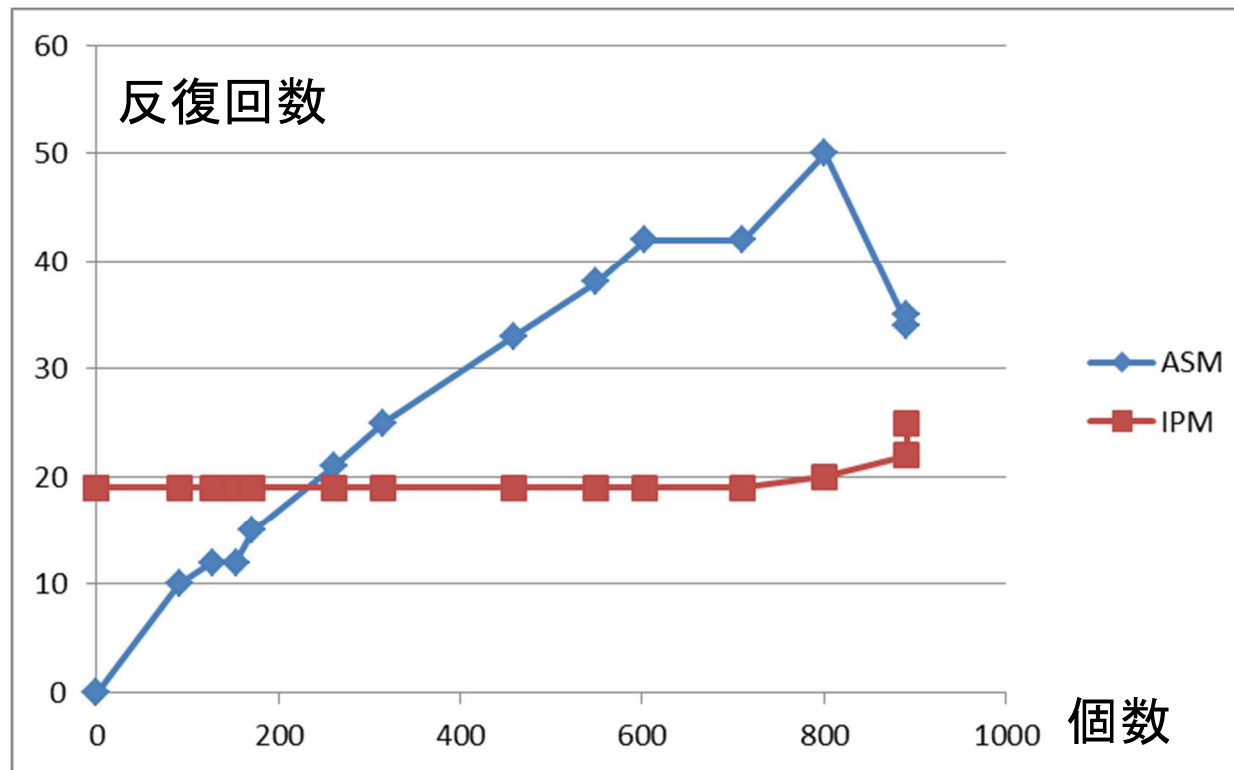


図 3.8: モデル 2:接触する 2 枚の平板

※(解析事後にしか計算できない量であるが)
接触の広さの指標としてASMで
変化した接触対数を採用した

- Tanohらによる内点法接触を拡張、FrontISTRに実装した
 - 結合拘束を考慮
 - 弾性体同士のnode to surface接触
- 電子機器モデルによる数値検証を実施
 - 実機モデルにて有効制約法より約20%~50%高い収束性を確認.
 - 収束性はパラメータ η に大きく依存
 - 適切なパラメータ設定が必要になる点が課題
- 接触範囲の広さを変えた場合の収束性について
 - モデル2で内点法と有効制約法の収束性能の分岐点（約200程度の接触点数）を確認.

1. はじめに

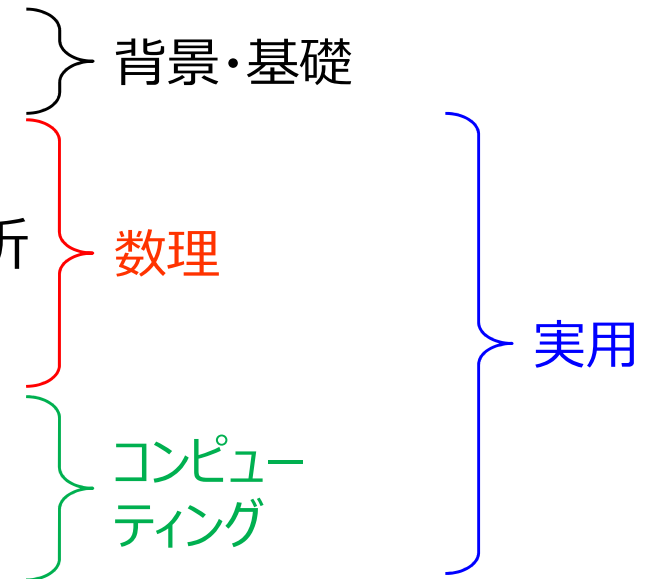
2. 内点法による接触解析

- 1. 定式化と解法
- 2. 主双対内点法による接触解析
- 3. Mehrotraの予測子修正子法による接触解析
- 4. 増分解析におけるwarm-start法の適用

3. 大規模並列接触解析

- 1. マスタースレーブ要素による大規模並列化

4. まとめと今後の課題



■ 予測・修正の2ステップを反復し元問題の最適解を探索

【予測ステップ】

- $\mu = 0$ としてNewton方向 $(\Delta\bar{\mathbf{u}}, \Delta\bar{\mathbf{r}})$ を計算する

【 μ の更新】

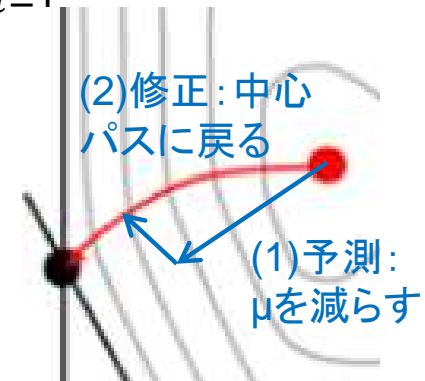
- 予測ステップでの最大ステップ幅 $\bar{\alpha}_u, \bar{\alpha}_r$ を求める
- 予測前後の双対ギャップの比を用いて μ を更新する

$$\mu^{\text{new}} = \left(\frac{g(\mathbf{u}_k + \bar{\alpha}_u \Delta\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{r} + \bar{\alpha}_r \Delta\bar{\mathbf{r}})}{g(\mathbf{u}_k, \mathbf{r})} \right)^\gamma \mu^{\text{old}} \quad \text{ここで} \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n_c} (\mathbf{T}_i^T \mathbf{u} + h_i) r_i$$

【修正ステップ】

- 主双対内点法における1次の最適条件に $(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = (\mathbf{u}_k + \Delta\bar{\mathbf{u}} + \Delta\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{r}_k + \Delta\bar{\mathbf{r}} + \Delta\tilde{\mathbf{r}})$ を代入、修正ステップ $(\Delta\tilde{\mathbf{u}}, \Delta\tilde{\mathbf{r}})$ について解く

※修正ステップ量が微小と仮定して得られる線形方程式を解く



予測子修正子法の特徴

- 1ステップあたりで、行列ソルバの実行が実質1回で済む

- 予測ステップと修正ステップの線形方程式について係数行列が一致する（ように手法が設計されている）ため

【予測ステップの線形方程式】

$$\begin{bmatrix} K + \rho \sum_{i=1}^{n_M} B_i B_i^T & T_1 \ T_2 \ \cdots \ T_{n_c} \\ \hline r_1 T_1^T & d_1 \ \quad \quad \quad \mathbf{0} \\ \vdots & \quad d_2 \ \cdots \quad \\ r_{n_c} T_{n_c}^T & \mathbf{0} \ \quad \cdots \ d_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta \bar{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \\ \hline -r_1 d_1 \\ \vdots \\ -r_{n_c} d_{n_c} \end{bmatrix}$$

【修正ステップの線形方程式】

$$\begin{bmatrix} K + \rho \sum_{i=1}^{n_M} B_i B_i^T & T_1 \ T_2 \ \cdots \ T_{n_c} \\ \hline r_1 T_1^T & d_1 \ \quad \quad \quad \mathbf{0} \\ \vdots & \quad d_2 \ \cdots \quad \\ r_{n_c} T_{n_c}^T & \mathbf{0} \ \quad \cdots \ d_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{u}} \\ \Delta \tilde{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hline \mu - \Delta \bar{r}_1 T_1^T \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \mu - \Delta \bar{r}_{n_c} T_{n_c}^T \Delta \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix}$$

パラメータ設定 $\mu, \epsilon_1, \epsilon_2$

$\mathbf{u}_0, \mathbf{r}_0$ を与える

$k = 0$

Loop k

- 予測ステップ方向($\Delta\bar{\mathbf{u}}, \Delta\bar{\mathbf{r}}_i$)を計算する
- μ の更新
- 修正ステップ方向($\Delta\tilde{\mathbf{u}}, \Delta\tilde{\mathbf{r}}_i$)を計算する
- ステップ方向を次のようにとる

$$(\Delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{r}) = (\Delta\bar{\mathbf{u}} + \Delta\tilde{\mathbf{u}}, \Delta\bar{\mathbf{r}} + \Delta\tilde{\mathbf{r}})$$

- 内点を保つようステップの減速率
 $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, 1]$ を決める
- 変位を更新する

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \sigma_1 \Delta\mathbf{u}_k, \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \sigma_2 \Delta\mathbf{r}_k$$

$k = k + 1$

If 残差 $< \epsilon_1$ **and** $\mu < \epsilon_2$ **then stop**

Continue loop

線形方程式を解く

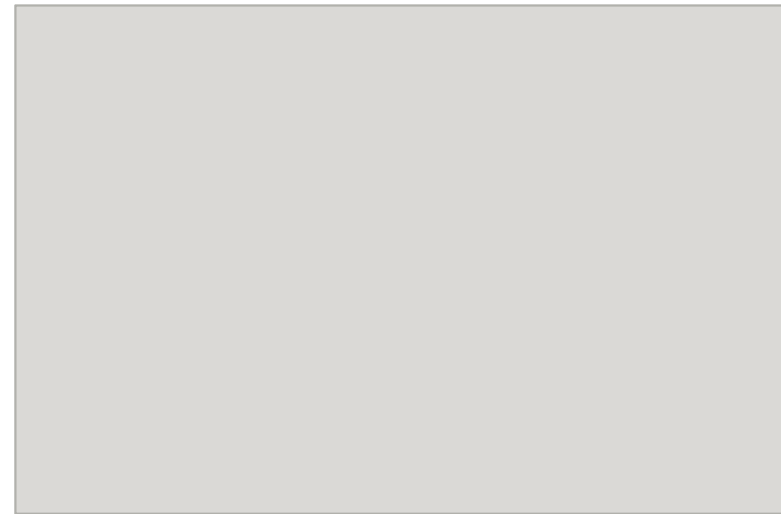
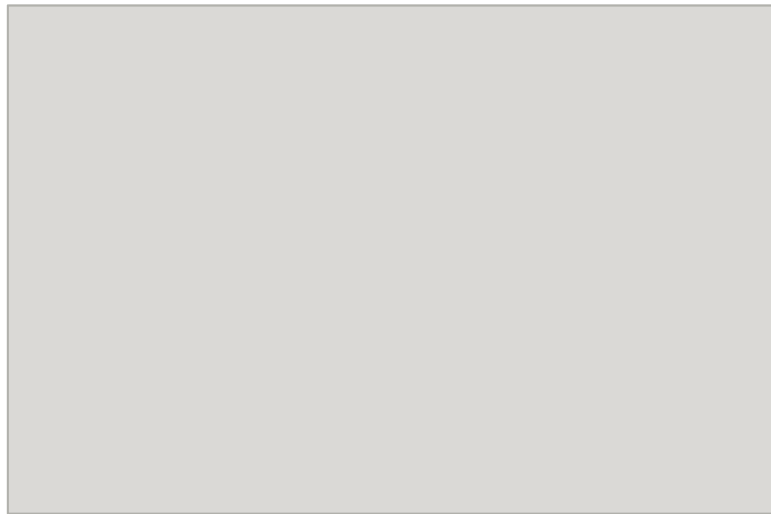
LU分解結果を保存しておく

LU分解結果を流用して
高速に解く

1 反復あたりの計算負荷は増加するが
反復回数が減少してトータルの
計算時間が減少すればよいと考える

- 予測子修正子法(PCM)、主双対内点法(PDIPM)、有効制約法 & Penalty法(ASM)による解析の手続きをFrontISTRに実装
- 数値解（変形量）及び計算時間、ステップ数を比較
 - ステップ数は各手法におけるメインループの反復数
- 比較条件
 - 初期 $\mu = 0.1, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-6}$
 - μ の減少率 $\eta = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$
 - 結合ペナルティ：1E+6
 - 接触ペナルティ（有効制約法）：1E+7
- 計算環境
 - CPU：Intel® Xeon® CPU X5675 @ 3.07GHz, 12core
 - メインメモリ：72GB

- ノートパソコンキーボード圧迫解析 (相当)
 - キー押下 (ここでは面荷重で代用) 時の沈み量が設定した許容値内に収まるかを見る

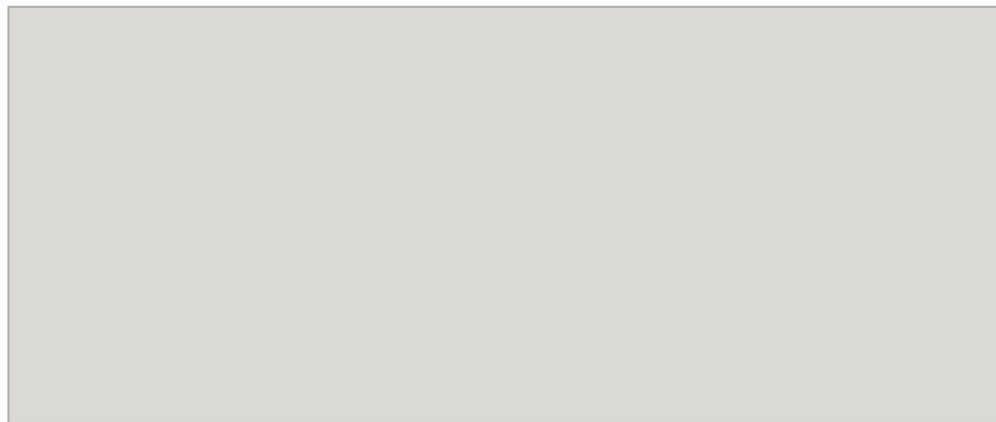


- 2,214,459自由度、接触候補対数41,039、結合拘束数8,923

■ 変形量は各手法とも一致することを確認

表 3.6: 各モデルでの最大節点変位

	ASM	PDIPM					PCM	
		η	0.01	0.1	0.3	0.5		0.7
1	0.3224		0.3224	0.3224	0.3224	0.3224	0.3224	0.3224
2	0.2432		0.2432	0.2431	0.2431	0.2431	0.2431	0.2431
3	1.496		1.496	1.496	1.496	1.496	1.496	1.496
4	4.216		4.216	4.216	4.216	4.216	4.216	4.216
5	2.496		2.496	2.496	2.496	2.496	2.496	2.496



モデル5荷重方向変位コンター(左:有効制約法、中:主双対内点法、右:予測子修正子法)

■ 反復回数

- 自由度の小さいモデル1を除けば
予測子修正子法 < 主双対内点法 < 有効制約法の順
- 予測子修正子法は主双対内点法の約50%程度かそれ以下

3手法の反復回数比較

	ASM	PDIPM					PCM	
		η	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7	
1	7		10	11	12	20	38	5
2	40		15	18	22	34	64	3
3	36		19	20	20	23	39	13
4	60		50	49	47	44	49	25
5	135		62	60	57	56	67	25
赤…1位、青…2位、黒…3位								

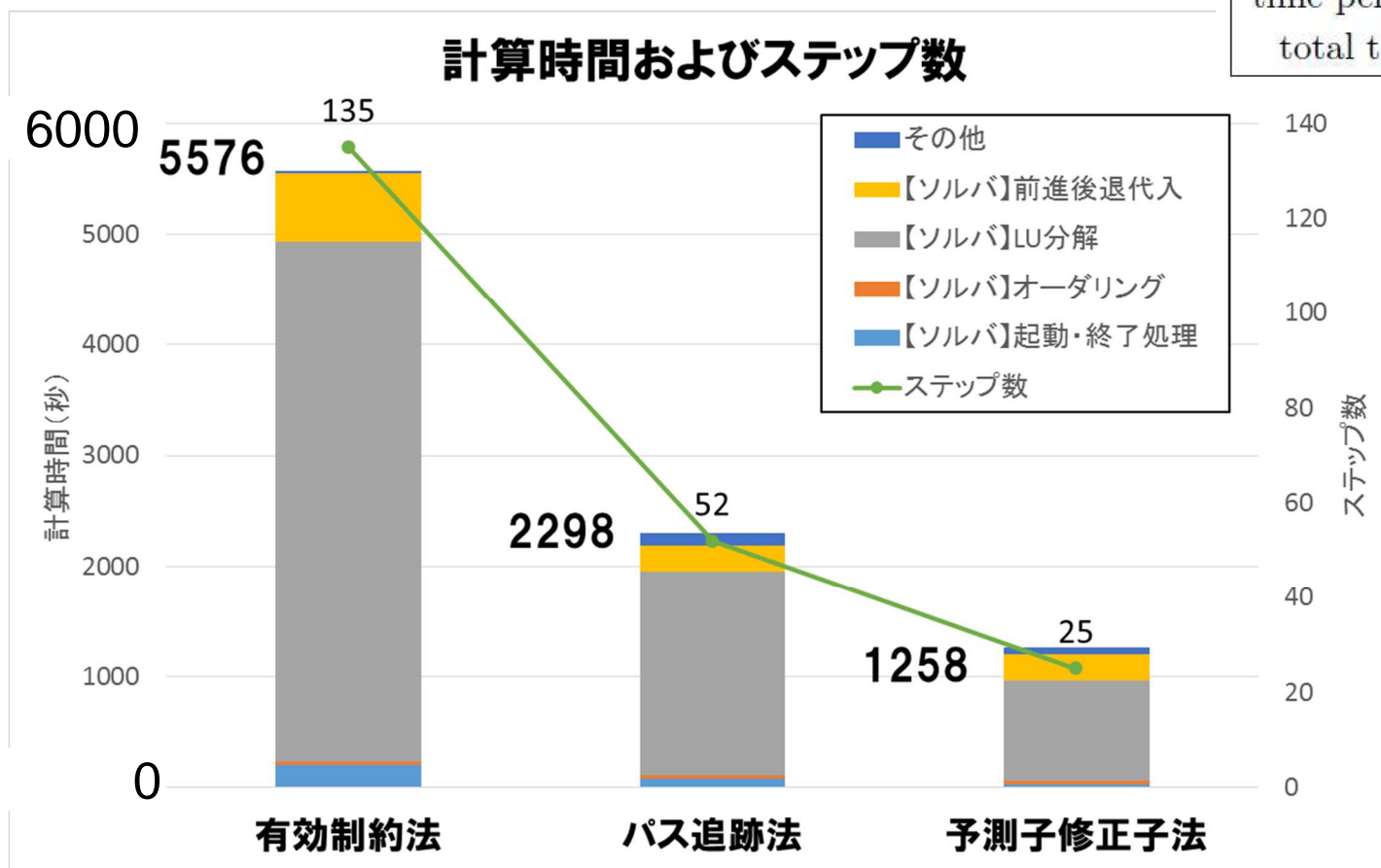
主双対内点法(PDIPM)は最も反復回数の少ない η のケースを採用

■ 実計算時間

- 予測子修正子法が反復あたりの計算時間が最も大きいですが、他の2 つに比べてその増加は軽微

表 3.8: モデル5の実計算時間

	ASM	PDIPM	PCM
time per iter.(sec.)	41.3	44.2	50.3
total time(sec.)	5576	2298	1258



- 内点法による接触解析を高速化する方法として Mehrotraの予測子修正子の検討を行った
- アルゴリズムをFrontISTRに実装
- 電子機器モデルによる数値検証にて標準的な主双対内点法による接触解析より40%以上実計算時間が短縮されることを確認した

1. はじめに

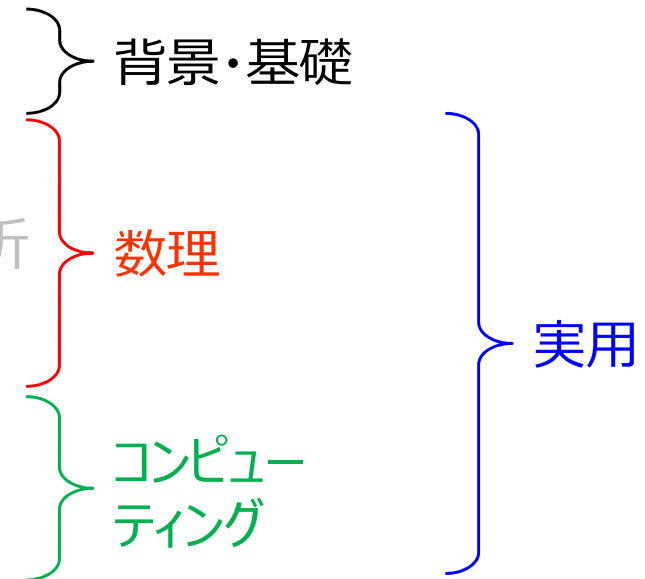
2. 内点法による接触解析

- 1. 定式化と解法
- 2. 主双対内点法による接触解析
- 3. Mehrotraの予測子修正子法による接触解析
- 4. 増分解析におけるwarm-start法の適用

3. 大規模並列接触解析

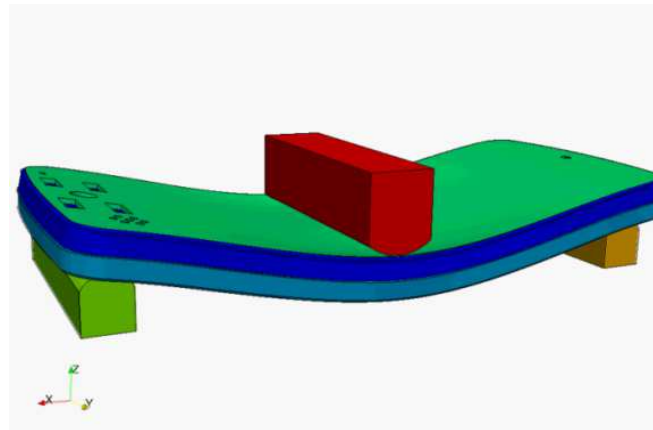
- 1. マスタースレーブ要素による大規模並列化

4. まとめと今後の課題



■ 増分解析の必要性

- モデル3のスマートフォン3点曲げなどは、荷重を段階的に加えたときの変位履歴を取るため、外力の大きさを徐々に増大させる一連の解析を実行する



■ 内点法接触の場合

- 標準的な主双対内点法は、近似解を利用して反復回数を減らすことができない
(2ステップ目以降は実質解き直し)
- **ウォームスタート法を導入し、増分解析において反復回数を減らす方法について検討した**

- 全部で N_{step} ステップからなる解析の、
 $k (= 1, 2, \dots, N_{step})$ ステップ目に解く釣合方程式 (微小変形の場合)

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{F}^{(k)} - \sum_{s=1}^{n_C} t_{N,s}^{(k)} \mathbf{T}_s = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{T}_s^T \mathbf{u}^{(k)} + h_s \geq 0,$$

$$t_{N,s}^{(k)} \geq 0,$$

$$t_{N,s}^{(k)} (\mathbf{T}_s^T \mathbf{u}^{(k)} + h_s) = 0, (s = 1, 2, \dots, n_C)$$

$$\mathbf{B}_s^T \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0} (s = 1, 2, \dots, n_M).$$

(参考) 一般的な $\mathbf{F}^{(k)}$ の与え方

$$\mathbf{F}^{(k)} = \frac{k}{N_{step}} \cdot \mathbf{F}_{const}$$

目標の荷重値 \mathbf{F}_{const} まで比例で増える

- 最適化問題

$$\underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} I(\mathbf{u}^{(k)}), I(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F}^T \mathbf{u}$$

$$\mathbf{T}_s^T \mathbf{u}^{(k)} + h_s \geq 0 (s = 1, 2, \dots, n_C),$$

$$\mathbf{B}_s^T \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0} (s = 1, 2, \dots, n_M).$$

ポテンシャルエネルギー

非貫入条件

結合拘束条件

■ 内点法のログバリア関数

$$\min_{\mathbf{u}} I(\mathbf{u})$$

$$w_m \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n_C),$$



$$I_\mu(\mathbf{u}) \equiv I(\mathbf{u}) - \mu \sum_{m=1}^{n_C} \log w_m$$

ログバリア関数

■ 増分解析での内点法接触

Loop $k = 1, N_{step}$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)}, \mu = \mu_0$$

Loop l

If 残差と μ が 0 に収束 **then stop**

1. $I_\mu(\mathbf{u})$ の Newton 方向を計算

2. 接触制約を破らないように減速した上で変数を更新する

3. μ を縮小する

2ステップ目、 μ がリセットされると
active ($w_m \approx 0$) な接触ペアで
過大な反発が生じる

■ ペナルティ項を付加した緩和問題を考える

$$\min_{\mathbf{u}} I(\mathbf{u})$$

$$w_m \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n_C),$$



$$I_\mu(\mathbf{u}) \equiv I(\mathbf{u}) - \mu \sum_{m=1}^{n_C} \log w_m$$



$$\min_{\mathbf{u}} I(\mathbf{u}) + \sum_{m=1}^{N_C} c_m \xi_m$$

c_m : 緩和のためのペナルティ項

b_m : ギャップ関数の上限

ξ_m : 緩和のための制御変数

$$w_m = g_m(\mathbf{u}) \quad (m = 1, 2, \dots, n_C)$$

$$\underline{-\xi_m} \leq w_m \leq b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n_C)$$

制約境界が $w_m = 0$ から $w_m + \xi_m = 0$ にずれるため、前ステップの収束解が制約境界上に乗らない

$$\underline{\xi_m} \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n_C)$$

$\xi_m = 0$ のとき、元問題と（上限 b_m を除いて）一致
ペナルティ項 $c_m \xi_m$ が ξ_m を 0 に近づけるように（緩和問題の解が元問題の解に近づくように）働く

■ ペナルティ項を付加した緩和問題を考える

$$\min_{\mathbf{u}} I(\mathbf{u})$$

$$w_m \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n_C),$$



$$I_\mu(\mathbf{u}) \equiv I(\mathbf{u}) - \mu \sum_{m=1}^{n_C} \log w_m$$



$$\min_{\mathbf{u}} I(\mathbf{u}) + \sum_{m=1}^{N_C} c_m \xi_m$$

$$\hat{I}_\mu(\mathbf{u}) \equiv I(\mathbf{u}) + \sum_{m=1}^{N_C} c_m \xi_m - \mu \sum_{m=1}^{n_C} \log \xi_m$$

$$w_m = g_m(\mathbf{u}) \quad (m = 1, 2, \dots, n_C)$$



$$-\mu \sum_{m=1}^{n_C} \log(w_m + \xi_m) - \mu \sum_{m=1}^{n_C} \log(b_m - w_m)$$

$$-\xi_m \leq w_m \leq b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n_C)$$

$$\xi_m \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n_C)$$

↑ のバリア関数を用いて
内点法の手続きを行う

■ $\hat{I}_\mu(\mathbf{u})$ の停留条件

$$\nabla I(\mathbf{u}) - \sum_{m=1}^{N_C} \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

$$(g_m(\mathbf{u}) + \xi_m)(\lambda_m + \varphi_m) = \mu \quad (m = 1, 2, \dots, n_C),$$

$$\xi_m(c_m - \lambda_m - \varphi_m) = \mu \quad (m = 1, 2, \dots, n_C),$$

$$\varphi_m(b_m - g_m(\mathbf{u})) = \mu \quad (m = 1, 2, \dots, n_C)$$

φ_m は $\varphi_m = \mu / (b_m - w_m)$ をみたす変数として、

λ_m は $\lambda_m = \frac{\mu}{(g_m(\mathbf{u}) + \xi_m)} - \frac{\mu}{(b_m - g_m(\mathbf{u}))}$ をみたす変数として

新たに定義し、独立変数として扱う

Newton方向の導出は上式のヤコビアンを計算する

独立変数 $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \xi \\ \lambda \\ \varphi \end{pmatrix}$

(頑張って計算すると) $\Delta \mathbf{u}$ に関する縮約された係数行列が得られる

■ ペナルティ b_m, c_m の設定

- 十分な大きさの値を設定しないと解に緩和の影響が現れる懸念がある
- 以下の規則に従って動的にペナルティ数を調整する

$$\text{If } g_i(\mathbf{x}^{(l)}) > 0.9b_i^{(l)}, \quad \text{then } b_i^{(l+1)} = 10b_i^{(l)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n_C).$$

$$\text{If } \lambda_i^{(l)} + \varphi_i^{(l)} > 0.9c_i^{(l)}, \quad \text{then } c_i^{(l+1)} = 10c_i^{(l)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n_C).$$

- 初期ペナルティは本研究では以下の通り取る

$$b_i^{(0)} = 10(g_i(\mathbf{x}^{(0)}) + 1)$$
$$c_i^{(0)} = (1 + \beta_i)(\lambda_i^{(0)} + \varphi_i^{(0)})$$

- β_i は初期ペナルティを調整するパラメータ

■ ウォームスタートの有/無で、反復あたりの計算コストはほとんど変わらない

- 内点法接触のホットスポット：
Newton方向を得るための
線形ソルバ実行

- 線形ソルバは基本的に直接法
→ **計算コストは非零成分の配置で決まる**

- Newton法の1次近似式において、主変数以外の変数は縮約でき、どちらの手法もソルバに渡す非零配置は同じになる（ペナルティ法などと同じ非零配置）

Loop $k = 1, num_step$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)}, \mu = \mu_0$$

Loop l

If 残差と μ が 0 に収束 **then stop**

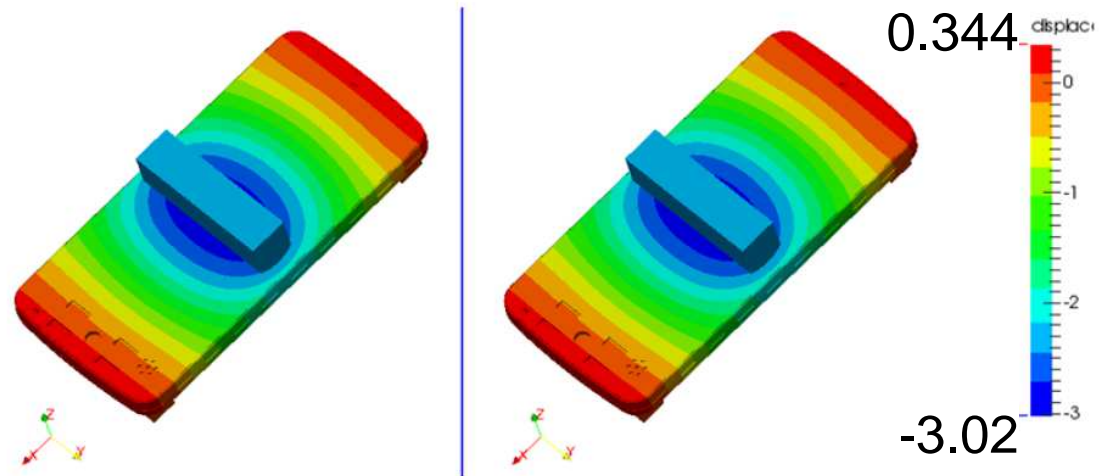
1. $I_\mu(\mathbf{u})$ の **Newton** 方向を計算
2. 変数を更新する
3. μ を縮小する

- 標準的な主双対内点法 (IPM) と内点法warm-start (WS) について結果の精度とステップ数を比較
 - ステップ数は各手法におけるメインループの反復数
- 比較条件
 - モデル3
 - 初期 $\xi = 0.01$,
 - ペナルティパラメータ : $\beta_i = 10$,
 - 収束閾値 : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-7}$
 - 結合ペナルティ : $1E+6$

■ 解析結果

- warm-startあり(WS)、なし(IPM)で変位の一致を確認した

	モデル 3	
substep	IPM	WS
1	-0.59658	-0.59657
2	-1.2515	-1.2515
3	-1.8782	-1.8782
4	-2.4652	-2.4652
5	-3.0242	-3.0242



☒ ステップ5変位コンター:左…warm-startあり、右…なし

■ 反復回数

- ウォームスタート導入によって約30%程度の反復回数減

	モデル3	
初期 μ	0.001	
減少率 η	0.01	
substep	IPM	WS
1	21	16
2	20	15
3	20	12
4	17	11
5	17	11

総反復回数：

warm-startなし…95回

warm-startあり…65回

ペナルティパラメータの検証

- ペナルティパラメータ β_i および緩和項 ξ の初期値を変えた場合の収束性の違いについて検証
- $\beta_i = 1, 10, 100$ と初期 $\xi = 0.001, 0.01, 0.1$

表 3.11: モデル 3 における反復回数のパラメータスタディ

初期 ξ_i	0.001			0.01			0.1		
β_i	1	10	100	1	10	100	1	10	100
1	19	18	23	27	16	17	40	19	19
2	15	15	16	15	15	16	17	20	20
3	13	11	11	12	12	12	14	16	16
4	12	11	11	12	11	12	13	15	15
5	12	11	11	12	11	12	13	14	15
計	71	66	72	78	65	69	97	84	85

初期緩和小

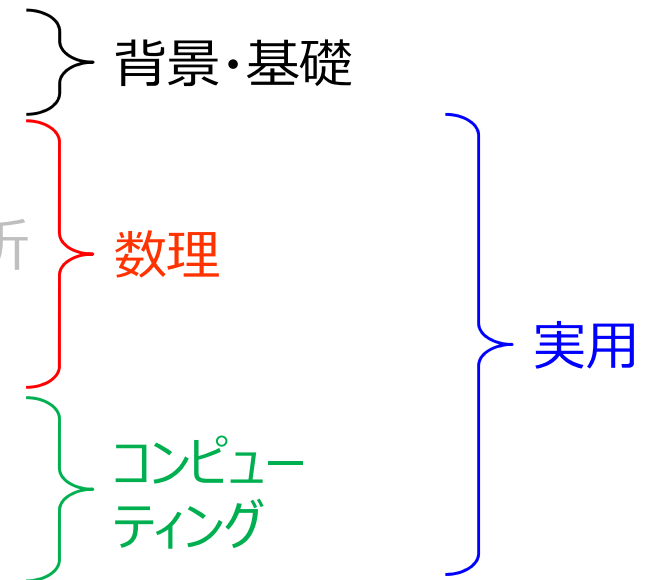
初期緩和大

- 緩和項を大きく取ると収束に反復回数が費やされる
- ペナルティは10が今回最良であったが、依存性が強い
 - 適切な設定手法が今後の課題

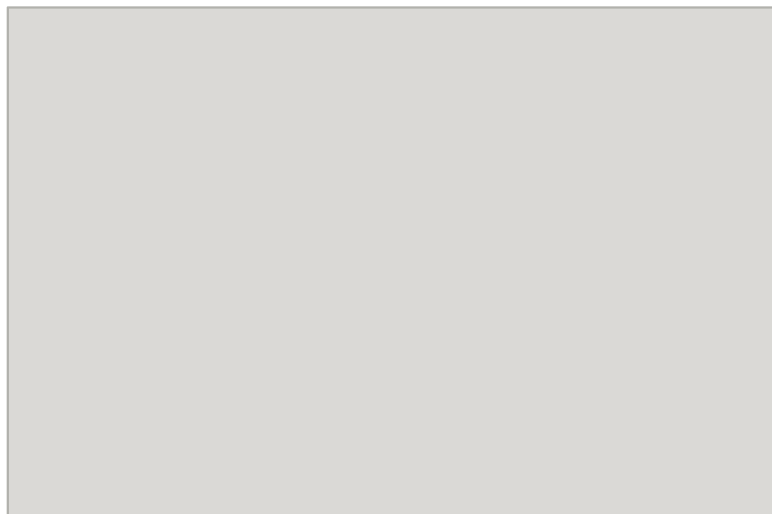
- 接触問題の増分解析に対して, warm-startによって内点法接触の収束性を向上させる方法を検討した.
 - 数値検証ではスマートフォンモデルで標準的な主双対内点法との比較を実施, 同程度の精度を保ちつつ反復回数を30%程度削減できることを確認した.
 - 一方warm-start法の反復回数はペナルティパラメータ緩和項に依存する適切な設定 (可能であれば汎用的な設定) の検討が課題

大規模並列接触解析

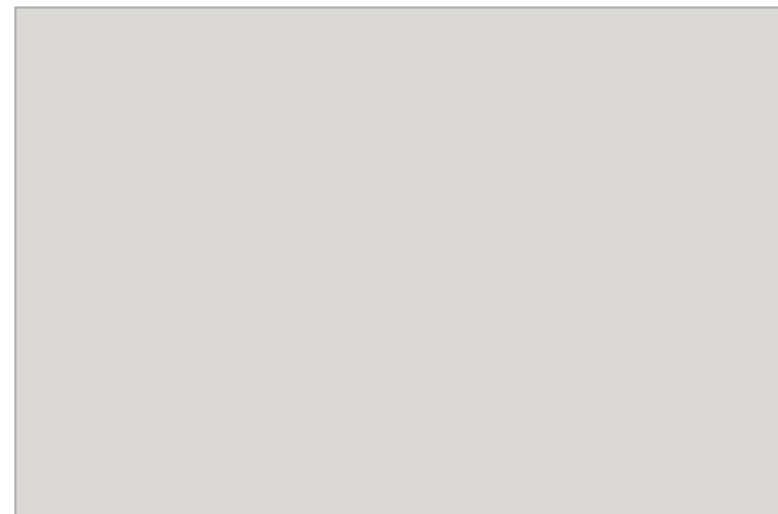
1. はじめに
2. 内点法による接触解析
 1. 定式化と解法
 2. 主双対内点法による接触解析
 3. Mehrotraの予測子修正子法による接触解析
 4. 増分解析におけるwarm-start法の適用
3. 大規模並列接触解析
 1. マスタースレーブ要素による大規模並列化
4. まとめと今後の課題



- 問題が大規模（数十万～数千万自由度）
 - 考慮すべき部品点数が多い
 - 解析の高精細化、形状簡易化の工数削減のため



ノートPCモデル(2.2M DOF)



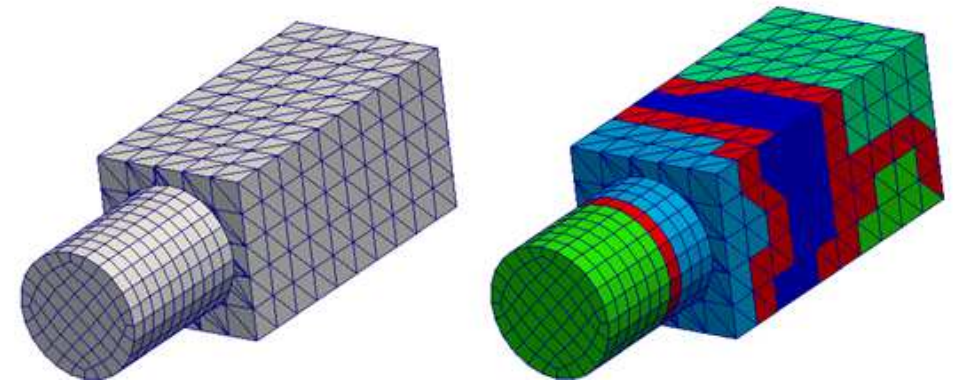
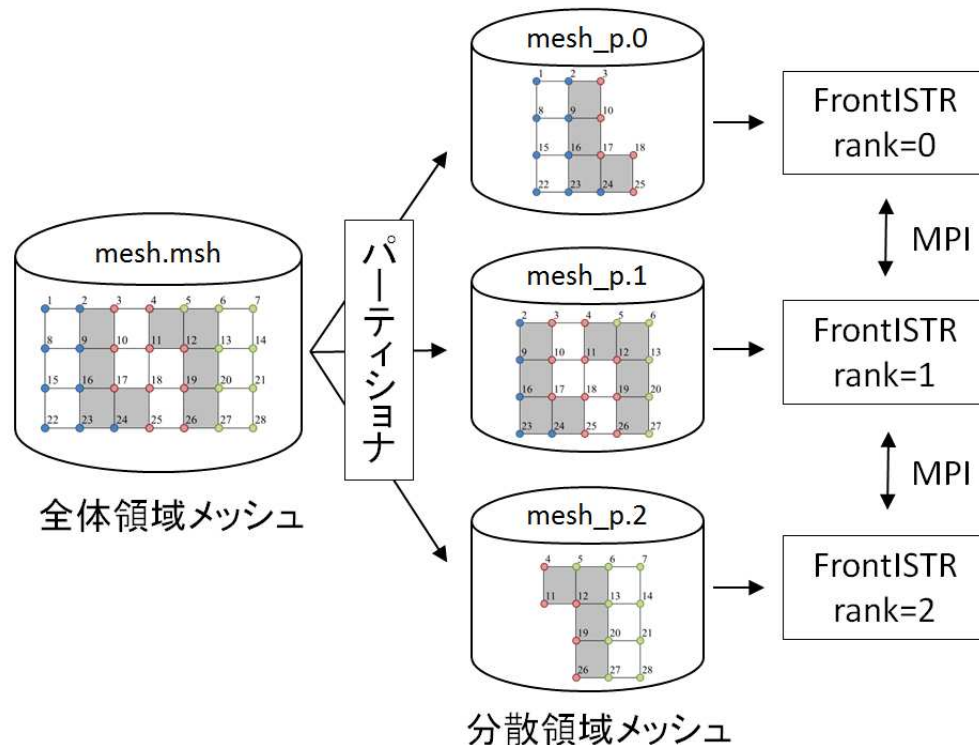
サーバ自重反り解析モデル(28.7M DOF)

並列計算機の性能を有効に活用する必要がある

システム	node	core/n ode	メモリ/node
東大FX10	1440	16	32GB
Intel クラスタ	18	12~18	128GB~

■ 領域分割による並列計算（FrontISTRを例に）

- 全体領域メッシュを小領域に分割し、各プロセスが境界節点の変位のみを通信して小領域の計算をする
- 始めに領域分割ツール（パーティショナ）を実行し、分散領域メッシュを作成→各プロセスが個別に読み込む

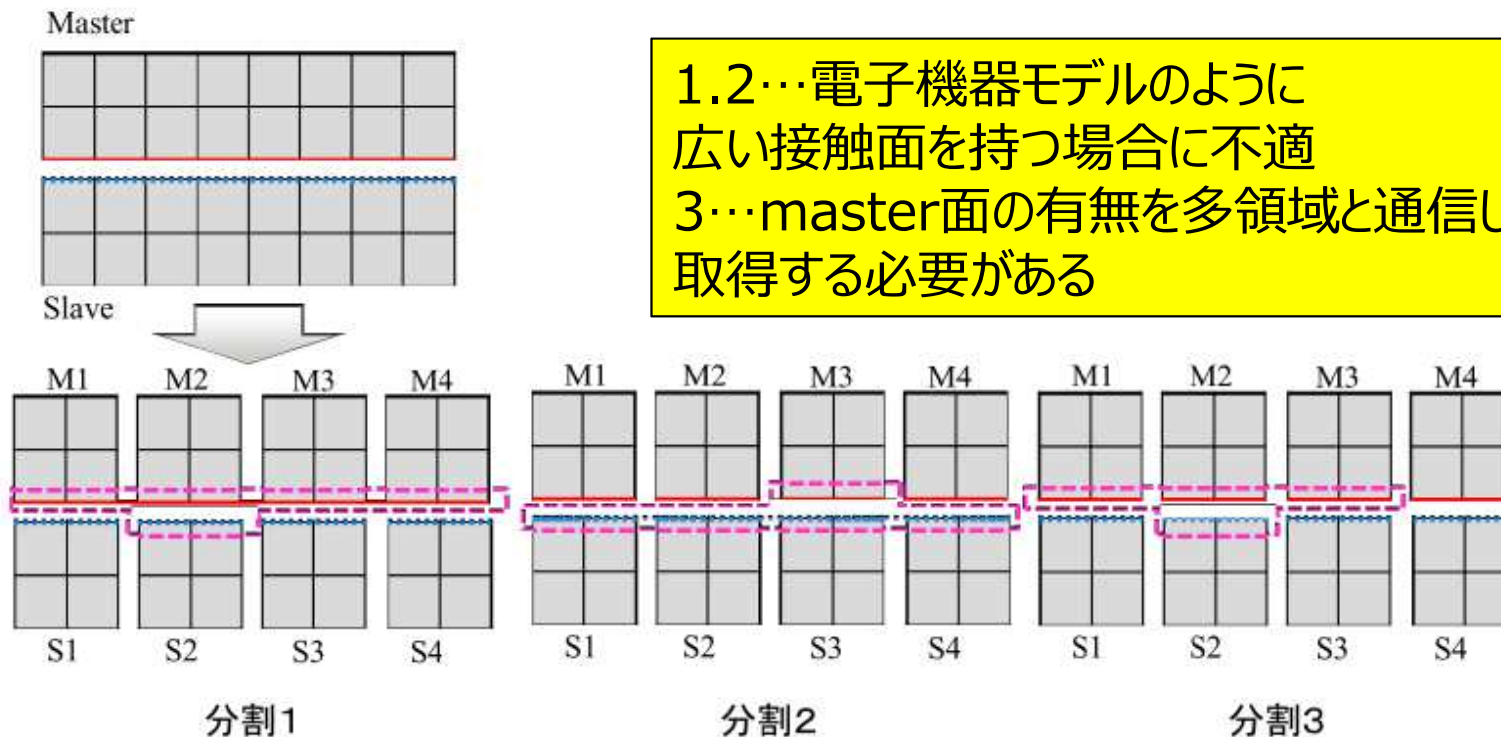


領域分割イメージ

■ 一般的な並列接触におけるデータ管理

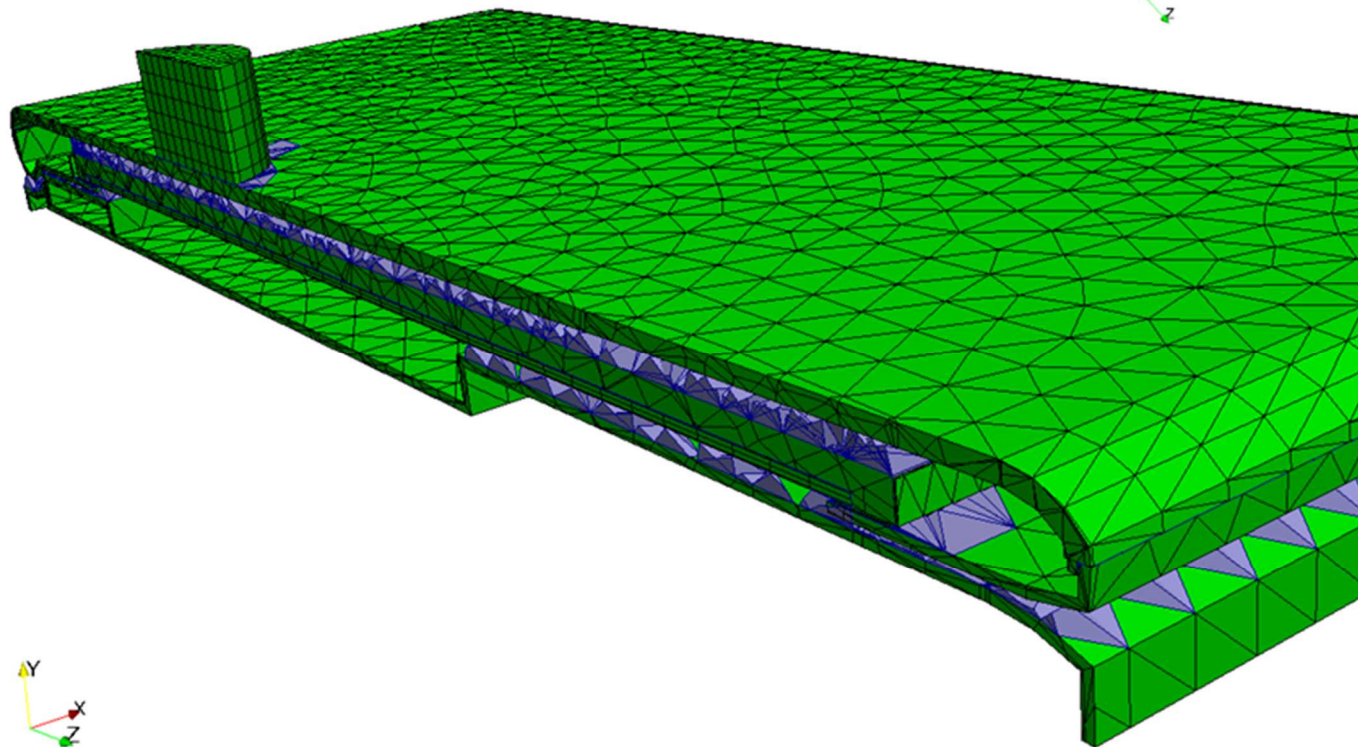
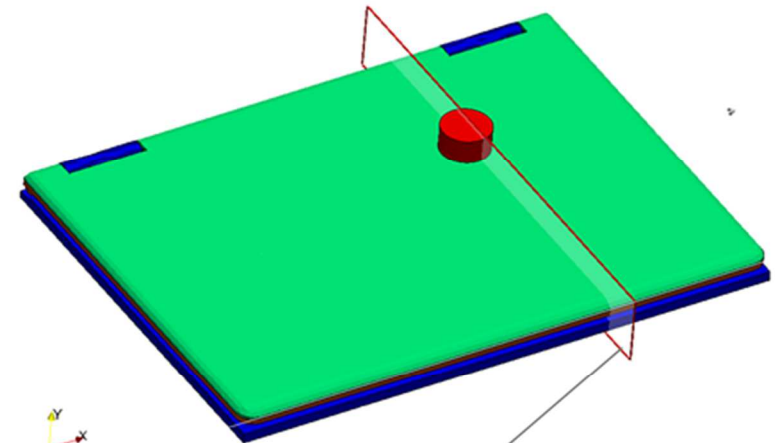
■ 接触点を探索し、剛性や接触力を領域間で共有する

1. slave節点：自領域だけ， master要素面：全体
2. master要素面：自領域だけ， slave節点：全体
(FrontISTRの並列接触はこの仕様)
3. slave 節点・master 要素面ともに自領域だけ



■ 接触点数は多いが、ほとんど「滑らない」

- 探索を事前に済ませ、近いペアで固定の通信テーブルを作れば効率的
- 固定要素（マスタースレーブ要素）での並列計算を提案



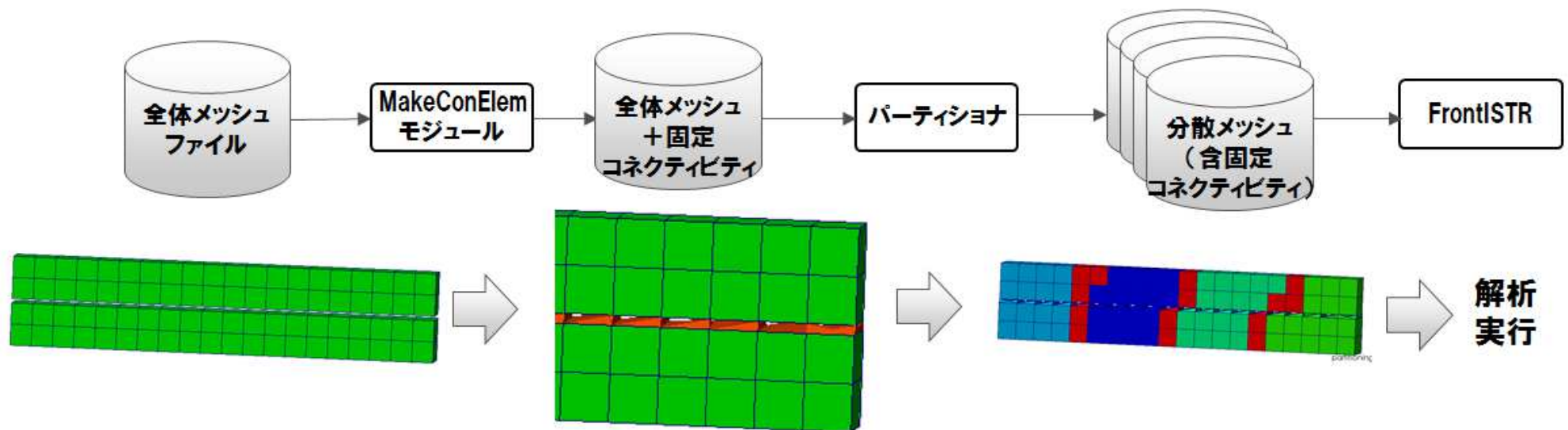
ノートPCの
接触対可視化例
(グレーの要素が
接触対)

■ 電子機器モデルの幾何的特徴

- 薄板同士の広い接触面を持つ
- 滑りをはじめ、面内方向の相対変位は少ない

→ 接触可能性のある対は初期形状でほぼ決まっている

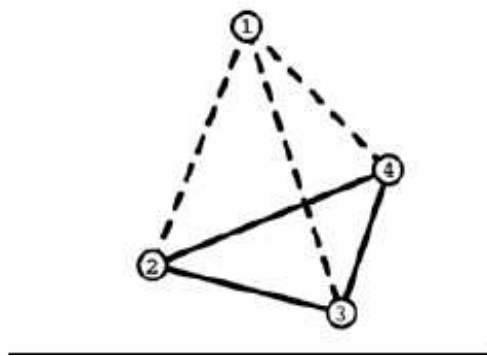
■ 接触面対を「節点集合と面集合の組」で定義せず、事前接触探索で発見した「節点-要素面対」からなる要素として定義、連続体ごと領域分割する



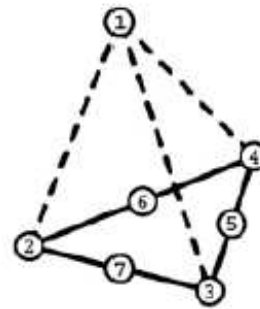
■ マスタースレーブ要素

- slave節点-master要素面の接続関係を与える要素
- FrontISTRでは連続体要素と区別なく領域分割できる

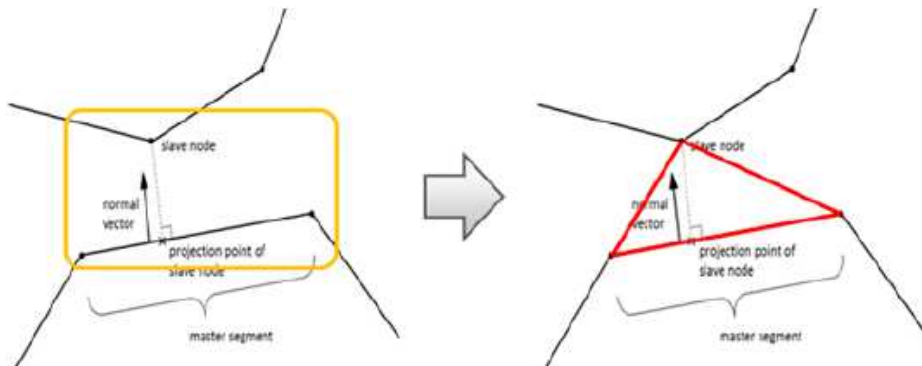
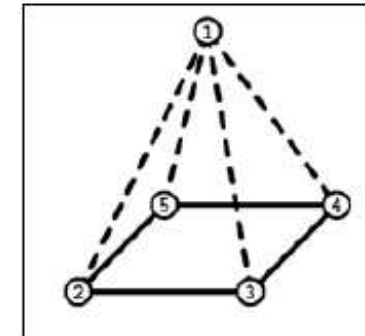
431 マスタースレーブ要素 (三角形断面, 1次)



432 マスタースレーブ要素 (三角形断面, 2次)



441 マスタースレーブ要素 (四角形断面, 1次)



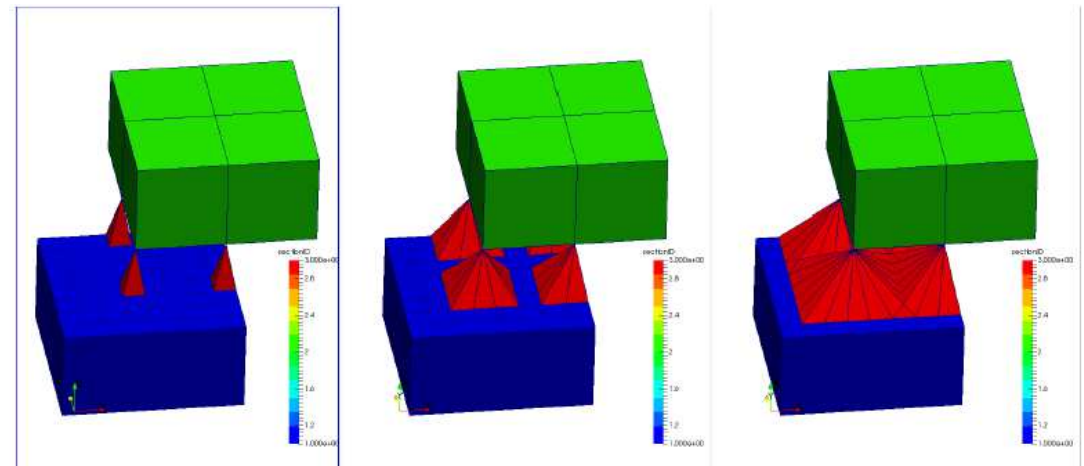
個々の接触対によるコネクティビティ
(=非ゼロ成分の配置)は
マスタースレーブ要素のそれと一緒に
違いは固定か、そうでないか

■ 利点

- 接触関係が分割時に既知なので、一体の構造体と同様に領域分割に基づく高スケールな並列計算ができる
- 解析中に接触探索の時間がかからない
- プログラムの実装が容易
 - 接触剛性・反力の計算は連続体要素の剛性・内力計算ルーチンを接触計算におきかえればよい

■ 欠点

- 滑りの多い問題には対応できない
 - 指定した個数内で隣接する要素も接続できるので、ある程度の滑りは許容できる（右図）



- サーバユニットの自重反り解析
 - ラックのガイドレールにユニットを設置した際の自重による撓み量を評価する
 - 自由度28,680,309
接触制約646,603
結合拘束208,702

■ 検討1

- 反復法線形方程式ソルバと拡張Lagrange乗数法の組み合わせによる高並列計算
- 高並列計算時のスケール性能を確認

■ 検討2

- 内点法vs有効制約法の収束性比較
- 内点法では線形方程式ソルバに直接法を用いるため、スケール性能ではなく収束性の比較
 - 実装は一応マスタースレーブ要素で行っている

■ 拡張Lagrange法

- ペナルティ数1.0, 反復法収束閾値1.0E-3, Newton 法収束閾値1.0E-6.
- 判定条件
 - 接触状態の変化が接触点数の3%以内
 - 貫入量が1.0E-6 以下 かつ 引張力が1.0E-6 以下
- 反復法の設定
 - AMG前処理付きCG法
 - 収束閾値1.0E-3、反復上限5000回
↑ 未収束であっても計算継続し、外側反復を回す

■ 計算環境

- FX10 (SPARC64TM IXfx:1.650GHz,16core/node使用)
…並列数:512,1024,2048
- Intel クラスタ(Xeon E5640-2.26GHz, 12core/node使用)
…並列数:96ノード ※内点法接触と同じ

検討1: 拡張Lagrange法と反復法

■ 結果

- Intelマシンでの内点法接触(4.3H)と比べ約5.5倍の計算時間
- スケール性能は比較的良好（並列化効率70%以上）であり、並列数を増やして高速化・大規模化することは可能

クラスタ	並列数	総計算時間	増速率	並列化効率	CG法 1反復時間	増速率	並列化効率
FX10	512	27.5	473.0	0.924	0.175	512	1
	1,024	14.8	878.8	0.858	0.0875	1024	1
	2,048	9.05	1437.2	0.702	0.0581	1542	0.753
intel	96	23.8	-	-	0.182	-	-

FX10の増速率は
アムダール則から算出した
1コア時間からの比

サーバユニットモデル
変位Magnitudeコンター

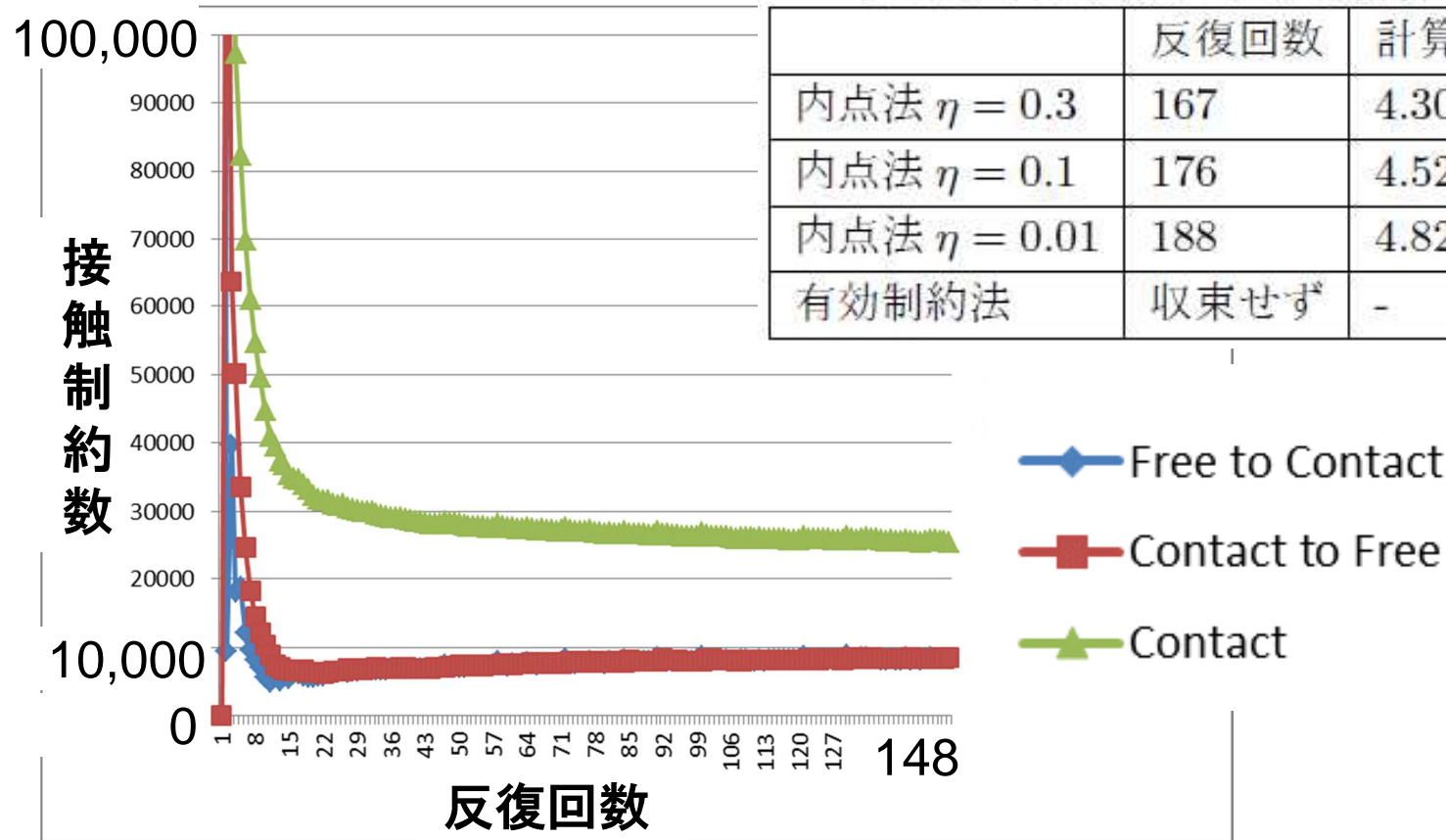
- 主双対内点法と有効制約法 & Penalty法による解析の手続きを並列接触FrontISTRに実装
- 数値解（変形量）及びステップ数を比較
- 比較条件
 - 初期 $\mu = 0.1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$
 - μ の減少率 $\eta = 0.3, 0.1, 0.01$
 - $\mu_{k+1} = (\sigma\eta + (1 - \sigma))\mu_k$
 - 結合ペナルティ：1E+6
 - 接触ペナルティ（有効制約法）：1E+7
 - 段階的に値を大きく取って必要な値を決定した
- 計算環境
 - Xeon E5640-2.26GHz 6コア×2CPU,128GBRAMマシン×8ノード
 - ノード内スレッド並列計算

検討2: 内点法接触

- 有効制約法はチャタリング発生し解を得られず
- 内点法…拡張Lagrange法と比べ若干の誤差
 - 収束閾値が甘い可能性があるが、これ以上厳しいと収束解を得られない

表 4.4: 各並列数における計算時間および反復回数

	反復回数	計算時間 (H)	最大変位
内点法 $\eta = 0.3$	167	4.30	0.727
内点法 $\eta = 0.1$	176	4.52	0.727
内点法 $\eta = 0.01$	188	4.82	0.727
有効制約法	収束せず	-	-



- 電子機器装置解析向けにマスタースレーブ要素による並列接触解析を検討。
 - マスタースレーブ要素生成と本手法に基づく並列接触を実行するモジュールを作成
 - 実際到大規模な電子機器モデルとして約2,800万自由度のサーバユニットモデルを用いて性能を確認した。
 - 反復法 + 拡張Lagrange法接触の性能検証
 - 内点法接触の性能検証
- 反復法 + 拡張Lagrange法接触
 - 並列化効率は70%以上得られた一方で、サーバモデルでは内点法接触と比べ約5.5倍の計算時間を要した
- 内点法と有効制約法の性能比較
 - 有効制約法でチャタリングの発生する大規模モデルにおいても内点法は収束解を得られることが分かった
 - ただし正確な解を得るには収束閾値を厳しくしても収束するよう対応する必要がある。

まとめ

- 電子機器構造解析の課題に対し、

- 接触解析手法
- 並列化手法

の両面から計算効率化について検討した結果を紹介した。

- 産業上の実問題に対する、数理・コンピューティングの適用例として、ご参考になれば幸いです

■ 少しだけ宣伝

■ 弊社では、FrontISTRに電子機器向け各種機能追加を行って活用しています

- 特に接触解析を重点的に改良

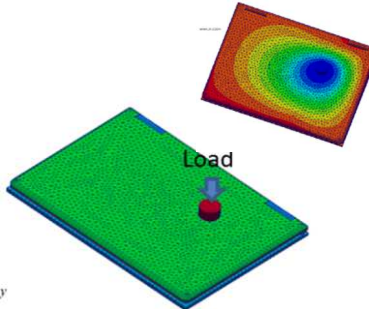
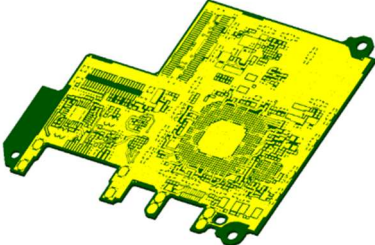
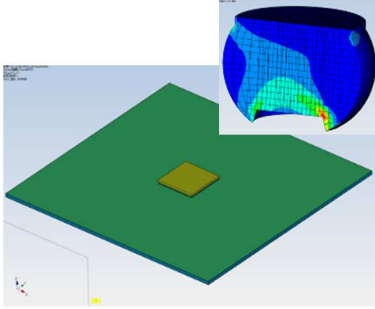
■ 弊社カスタマイズ版FrontISTR
「**FS-Solver**」

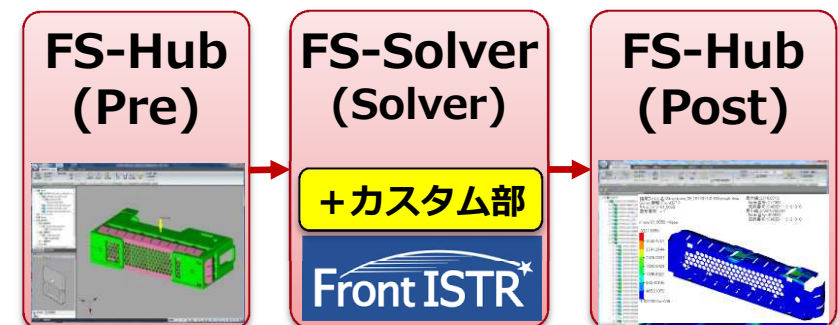
+ 独自統合解析環境「**FS-Hub**」
を提供中です

- どうぞよろしくお願い致します。

■ FrontISTR本体開発も行っています

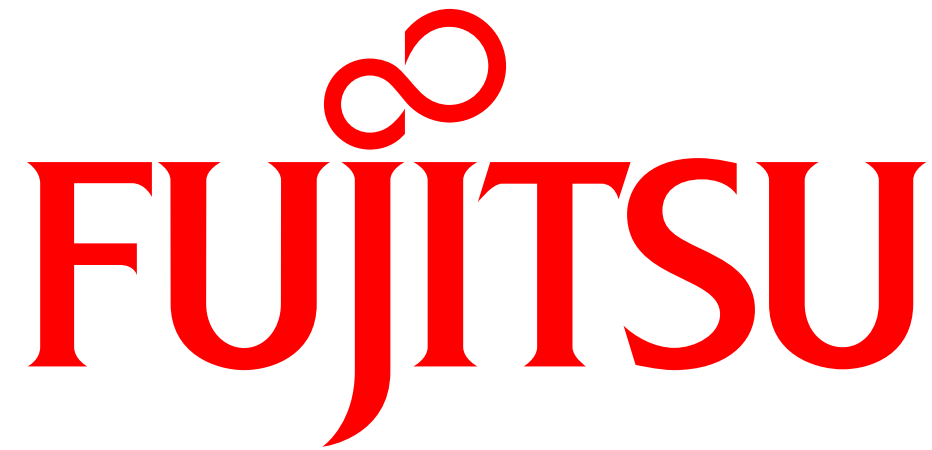
- 回転・トルク荷重機能の開発
- 自動増分・カットバック機能開発（予定）

静解析 ： 機械的荷重	静解析 ： 熱荷重
 <p>ノートPC圧迫・他 (2014 OpenCAE学会)</p>	 <p>プリント基板反り (2013計算工学講演会)</p>  <p>はんだ接合部疲労寿命 (2016計算力学講演会)</p>



■ 接触解法について

- warm-start法のペナルティ依存性解消に向けた検討
- warm-start法と予測子修正子法の併用による高速化検討
- 摩擦接触問題への拡張



shaping tomorrow with you